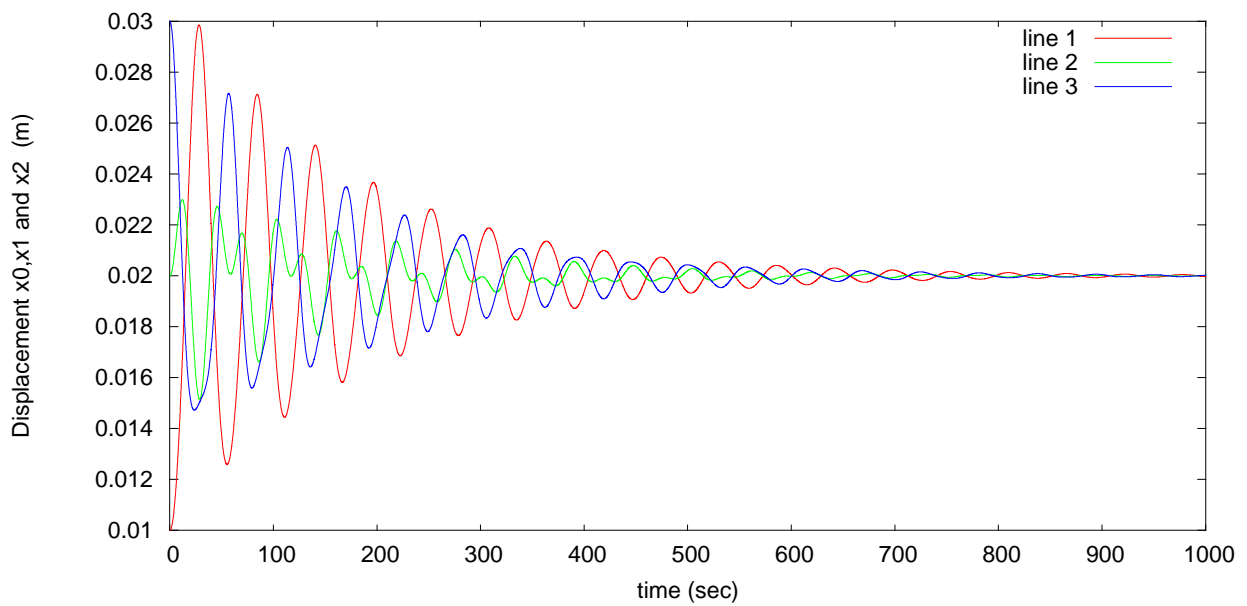
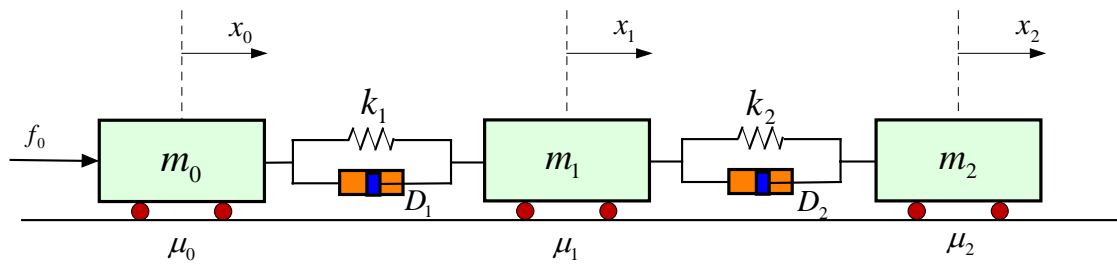


シミュレーション工学

授業資料

(2009)



情報理工学部
コンピュータ応用工学科
穴吹 雅敏

1 . 授業計画

授業内容：

シミュレーション技術は、自然科学から社会科学まで広範に亘って利用されており現代の重要な技術の一つとなっています。本科目では、シミュレーション技術の基礎的事項の習得を第一義に考え、応用として制御系のシミュレーション技法やメカニカルシステムのシミュレーション技法の習得も目指します。物理則と数式モデルと題して、各種の物理・工学系の数式モデルの導出法について議論し、導出されたモデルを用いてコンピュータでシミュレーションする方法について考えます。第2部では、制御システムに限定して、そのシステムシミュレーション技法について学ぶことになります。具体的には、制御システムが伝達関数で与えられた場合、ブロック線図で与えられた場合、状態方程式で与えられた場合等について考察し、お互いの関連についても学習します。最後に、シミュレーション技法を利用して、制御システムの解析ならびに設計法の基本的で重要な事柄に焦点をあてながら制御システムの理解を深めます。

本科目では、実際にコンピュータを利用して、講義と並行しながらシステムシミュレーションの方法を確実に習得させることが目的です。なお、シミュレーション用の言語として、フリーソフトウェアの OCTAVE を利用する。

履修のポイント、留意事項：

プログラミング・同演習などコンピュータ関連科目を履修しておくことが望ましい。また、電気回路、物理学なども履修しておくことさらに本科目の内容を理解し易くなるものと思います。

ただし、コンピュータ利用のために必要な事項については、本講義でも復習をかねて解説します。

シミュレーションにはコンピュータを利用しますが、コンピュータのみの知識では実行することが出来ません。この講義を通してシミュレーション対象の知識を十分に持っていないかならないことを痛切に感ずることでしょう。シミュレーションを自由に行えるようになるためには、シミュレーションの対象物に関する知識を十分に持つことが大切です。ただし、その対象物は非常に沢山ありますのでそのすべてを理解することは不可能だと思えます。このような場合、対象物が異なっても何か共通点がありそうです。類似性(アナロジー)という言葉がありますが、いろいろな工学系を眺めるときこのことは大変重要です。機械と電気ではかけ離れた感じがするかもしれませんが、よく考えると類似性が存在します。

講義題目、概要

【授業スケジュール】

- (1)シミュレーションの基礎1、ガイダンスと基礎事項の確認、シミュレーションの基礎2、コンピュータの利用方法、OSの基礎知識、OCTAVE 概説
- (2)物理系のモデル化、簡単な1自由度系のモデル化とシミュレーション、物理系のモデル化、2自由度系のモデル化とシミュレーション
- (3)物理系のモデル化、多自由度系のモデル化、機械系のモデル化とラグランジュの運動方程式 その1
- (4)機械系のモデル化とラグランジュの運動方程式 その2、電気系のモデル化 単エネルギー系
- (5)電気系のモデル化 複エネルギー系、機械・電気複合系のモデル化、(40分の間試験)
- (6)各種制御要素の特性 その1 サーボモータのモデル化、各種制御要素の特性 その2 流量系のモデル化
- (7)各種制御要素の特性 その3 熱系のモデル化、各種制御要素の特性 その4 簡単なロボットのモデル化
- (8)制御系のシミュレーション 伝達関数表現の場合 その1、制御系のシミュレーション 伝達関数表現の場合 その2
- (9)状態方程式系のシミュレーション その1、状態方程式系のシミュレーション その2
- (10)プロセス系のシミュレーション、PIDコントローラを含む
- (11)サーボ系のシミュレーション、位相補償、最適レギュレータ
- (12)最適サーボ系、総合演習1
- (13)総合演習2
- (14)総合演習3

シラバスを提示しましたが、多分この通りには進行しないと思います。何故ならばこのシラバスには講義の目標値を提示したからです。出来る限りこのシラバスに記載された内容を修得できるよう努力しましょう。ただし、上記のシラバスを無視しなければならない場合もあるかと思えます。そのような事態が生じた場合は気にしないでシラバスを無視します。シラバス通りでないときが一番教育的な見地に立っているときかもしれません。とにかくこの授業を通して一つでも多くの知識を得て自分自身で行動できるようにしてください。

シミュレーション実験に関する当学科の歴史について

シミュレーションに関する実験をコンピュータ応用工学科の前身の学科である制御工学科で実施したのは30年程前のことである。T I - 59 (写真) という20カラム程度のサーマルプリンタ付きのプログラム電卓がテキサスインスツルメンツ社製から1977年頃に発売された。プログラムは、小さな磁気カードに格納でき、作成したプログラムは容易に再利用ができ、重宝したことを覚えている。当時はシミュレーションに関しては、専門家の間ではその重要性が認識されていたが、一般には浸透したものではなかった。



当時、このT I - 59を用いて、簡単な制御系のシミュレーションを学生実験として導入したのである。言語は、アセンブラに類似していたが、学生の皆さんは進んでシミュレーションに挑戦していたことを思い出す。T I - 59による実験は、5, 6年実施されたが、ご承知のように、パーソナルコンピュータの出現によって、パソコンに置き換えられた。一方、講義科目として、制御工学科に制御系シミュレーション・同演習が15年ほど前に開講され、多くの学生がシミュレーションを体験することが出来るようになった。当時は、EWS (エンジニアリングワークステーション) を用いて、UNIXベースでC言語を用いて、各種シミュレータ作りをしたことが思い出される。

次第にパーソナルコンピュータは高性能化され、かつ安価となったことにより、大学のコンピュータ環境は、パソコンにリプレースされ、学科のシミュレーションに関する授業もパソコンを用いた方法に変遷してきた。Windows ベースのマシンと各種言語環境が整備されるなか、G U I が簡単に作成できる Visual BASIC を用いた授業を行うようになった。制御工学科時代は、週2コマ (1コマ90分) の半期25回程度の授業が出来たこともあり、モデリングからシミュレーションまで一貫した授業環境を構築することができた。2001年に学部の改組改編が実施され、制御工学科はコンピュータ応用工学科に改称され、シミュレーション関係の授業は、シミュレーション工学となり、週1コマの授業となった。この時間的な制約も考え、コンピュータ応用工学科でのシミュレーション技法の教育には、O c t a v eを使用することになった。

コンピュータ応用工学科にて、この授業を展開するようになって3年が経過するが、概ね好評であるように感じられる。ただし、シミュレーションはシミュレーション対象の理解があつてこそ可能であるから、単にコンピュータに興味があるからとか言語に興味があるとかでは乗り越えることが出来ないの、一部の学生にとっては十分な理解の下で授業が進行しているとは言い難い面もある。学生の皆さんは、シミュレーション技法の意義を理解され、総合力が身に付くような勉強をしてもらいたいと思っている。

2 . シミュレーション技術

2 . 1 シミュレーション

シミュレーション(*simulation*)には、” 模擬、まね、見せかけ、ふり ” などの意味があり、最近いろいろな分野で耳にする言葉である。シミュレーションは、人工的に実際の環境に近いものを作りだし、その中で種々の実験を行い解析や設計を行うものと理解するとよい。シミュレーション技術は、社会科学から自然科学まで幅広く利用されており、現代科学では必要不可欠な重要な技術の一つとなっている。

さて、シミュレーションを行うためには、対象とする実体の行動様式（振る舞い）を何らかの形で表現する必要があり、それにはいろいろな方法がある。ところで対象とする実体を表現する方法には、大きく分けて二つがある。その一つは、実体と同じ構造を縮小模型などを用いて直接モデル化する方法である。例えば、高層建築物、橋梁の設計などには実体と同じ構造の縮小モデル（物理的モデル）を用いて各種の実験を行うことがなされる。他の一つは、実体を表す数式モデルを作り、その数式を何らかの形で実現する方法である。この方法は、最近の主流であり、数式モデルの構築には、物理法則が適用されることになる。

数式化された実体の数式モデルは、一般に計算機で解析されることが多く、計算機の種類によって、アナログ(*analog*)シミュレーション、デジタル(*digital*)シミュレーション、ハイブリッド(*hybrid*)シミュレーションと呼ばれる。アナログシミュレーションは、アナログ回路を用いて数式を模擬し、各種の物理量を電圧に対応させてシミュレーションを行う方法である。このシミュレーションには、従来アナログコンピュータが利用されたが、現在ではほとんど使用されなくなった。 デジタルシミュレーションは、数式をソフトウェアとして実現し、各種の数値解法を利用し、シミュレーションする方法で、現在のシミュレーションの主流がこれである。 ハイブリッドシミュレーションは、アナログとデジタルの混在するシミュレーション技術で両者の特徴を生かした方法である。 なお、単能型のシミュレーション装置をシミュレータ(*simulator*)と呼び、航空機シミュレータ、操船シミュレータ、原子炉シミュレータ、自動車運転シミュレータなど各種のシミュレータが開発され利用されている。 また、現在ではシミュレーション用の言語も各種あり、自由にシミュレーションができる環境が完備されている。ソフトウェアによるシミュレーションでも、取り扱う内容がある分野に固定されているような場合、そのソフトウェアをシミュレータと呼ぶことが一般的になってきた。例えば、回路関係では S P I C E、制御関係では、M A T L A Bなどが有名である。

2 . 2 物理系のシミュレーション

本節では、シミュレーションする対象を物理系に限定し、シミュレーションするための基礎事項を説明する。物理系は物理法則の支配を受ける系で、物理法則とは我々がよく知っているオームの法則、ニュートンの運動の法則などである。複雑な系であっても、簡単な物理法則を適用し、これらを連立させることにより、系を表現することができる。系は、静的な系と動的な系に分けることができる。系には、一般に入力があるが、入力のないものは、物理学では自由系と呼ばれる。

静的か動的かは、系内にエネルギーを蓄積する要素があるかどうかで分類できる。静的な系は、代数方程式で表され、動的な系は微分方程式で表される。なお、この科目でのシミュレーション対象は微分方程式で記述されるものとする。

2.3 動的系の例

図2.1(a),(b)に示す電気回路を例にとり説明する。

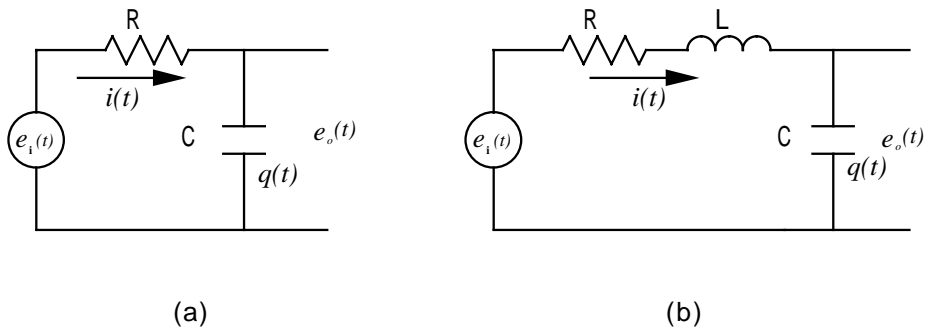


図2.1 動的な電気回路の例

図2.1(a)では、

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e_i(t) \quad , \quad q(t) = Ce_o(t) \quad , \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{de_o(t)}{dt} \quad (2.1)$$

が成立するから、入力電圧と出力電圧の間には次の微分方程式が成立する。

$$RC \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t) \quad (2.2)$$

また、図2.1(b)に対しては、

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e_i(t) \quad , \quad q(t) = Ce_o(t), i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{de_o(t)}{dt} \quad (2.3)$$

が成立するから次の微分方程式が得られる。

$$LC \frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + RC \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t) \quad (2.4)$$

次に図2.2の力学系を考える。

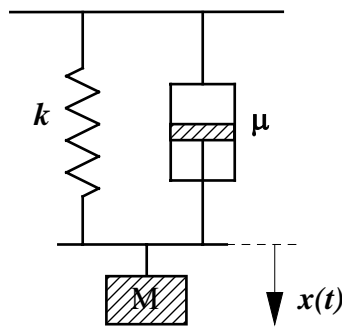


図2.2 力学系

バネに生ずる力は、変位に比例するとし、ダンパーには速度に比例する力が、質量には加速度に比例する力が生ずると仮定すると次の微分方程式が成立する。

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \mu \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0 \quad (2.5)$$

ここに、 M は質量、 μ は粘性抵抗、 k はバネ定数である。

いくつかの例を通して微分方程式の導出を行ったが、線形で係数が時間に対して一定であるような系は、次の微分方程式で表される。

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t) \quad (2.6)$$

この一般式において、 $x(t)$ は系への入力を、 $y(t)$ は出力を表す。上式において、全ての初期値を零と置いて、入力と出力のラプラス変換比を求めると次のようになる。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.7)$$

上式は、分母の次数が n であり、 $n \geq m$ ならば n 階の線形定係数常微分方程式で表現することが可能である。

式(2.7)の伝達関数を有する系のシミュレーションには、相変数表示(可制御標準形式)を利用したり、部分分数展開などを利用して次数の低い要素の並列結合(対角形、ジョルダン形)などに等価変換したモデルを利用するとよい。

2.4 類似性

前節で簡単な電気回路系と力学系の例題を示した。ここで再度二つの系の微分方程式を提示する事にしよう。

式(2.4)に、

$$e_o(t) = \frac{1}{C} q(t) \quad (2.8)$$

を代入すると

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = e_i(t) \quad (2.9)$$

となる。

また、力学系の式(2.5)で外力 $f(t)$ が存在すると仮定すと次式が成立する。

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \mu \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \quad (2.10)$$

ここで、式(2.9)と式(2.10)を比較してみよう。

表 2.1 異種物理系の類似性

機械(電気)系の名称	電気系	機械系
質量(インダクタンス)	L	M
粘性摩擦(抵抗)	R	μ
バネ定数(容量逆数)	1 / C	k
力(電圧)	$e(t)$	$f(t)$
変位(電荷)	$q(t)$	$x(t)$

3 . 力学の基礎

力学系の基礎として質点系の力学について述べる。はじめに簡単な力学系のモデル化の基礎となるニュートンの3法則について説明し、多質点系については解析力学を用いてモデル化する方法をとる。なお、関連する力学の基本事項についても併せて説明する。

3 . 1 ニュートンの3法則

3.1.1 第1法則 (慣性の法則)

物体はその状態を保ち続ける。すなわち、静止している物体はその状態を保ち、運動している物体は等速運動を続ける。

3.1.2 第2法則 (運動の法則)

質量 m の物体が力 F を受けて速度 v で運動するとき

$$\frac{d}{dt}(mv) = F \quad (3.1)$$

が成り立つ。もし、時間に対して質量 m が一定であるならば

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (3.2)$$

となる。 $\alpha = \frac{dv}{dt}$ とおいて加速度とすると

$$m\alpha = F \quad (3.3)$$

となる。

参考までに、 $p = mv$ を運動量と呼んでいる。

3.1.3 第3法則 (作用・反作用の法則)

二つの物体が互いに力を及ぼし合うときお互いの力は同一の作用線上にあり、大きさが等しく、向きが反対である。

3 . 2 力学要素の特性

3.2.1 バネ・質量系

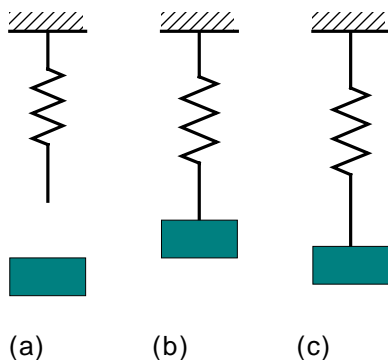


図 3.1 重力場でのバネ・質量系

したがって、(c)を表す微分方程式は次式のようなになる

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0) + mg \quad (3.5)$$

ところで、平衡点ではバネの復元力と重力が釣り合うから

$$k(x_e - x_0) = mg \quad (3.6)$$

したがって、

図 3.1 に示す力学系は重力場にあると仮定する。(a) は質量なしの場合、(b) は質量が平衡点で静止している場合、(c) は運動中の場合である。

それぞれの質点の位置が、(a) が x_0 、(b) が x_e 、(c) が x とする。

さて、重力の加速度を g とすると、質量 m の物体には次の力が作用する。すなわち、 $f_g = mg$ と $f_s = -k(x - x_0)$ が作用する。

したがって、質量 m には合力 F が作用することになる。

$$F = -k(x - x_0) + mg \quad (3.4)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_e) \quad (3.7)$$

が成立する。

ここで、 $y = x - x_e$ とおくと次式のように簡単化することができる。

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad (3.8)$$

このように静止した中立点からの変位で表すと式が簡単になることがわかる。

参考 ダランベールの原理

ニュートンの運動の法則を用いるといろいろな運動方程式を導出できることが分かった。一方慣性力も力の一つと考えて、質点に作用する力は常につり合い状態にあると考えるのがダランベールの原理である。この方法を用いると、動く物体の運動を静力学の問題として扱えることになる。

3.3 運動量と運動量保存の法則

運動量はすでに述べたように質量と速度の積で定義される量である。

したがって、ニュートンの運動方程式は、運動量 p をもちいると次式で表される。

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (3.9)$$

式(3.9)を区間 (t_1, t_2) で定積分してみると

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dp}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (3.10)$$

よって次式のように表される。

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (3.11)$$

ここで、外力がないならば（摩擦力もないならば）、運動量は

$$p_2 - p_1 = 0 \quad (3.12)$$

となり保存されることが分かる。これを運動量保存の法則という。

3.4 角運動量と角運動量保存の法則

運動の法則

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (3.13)$$

に位置ベクトル \mathbf{r} を掛ける（外積）。

$$\mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times F \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.15)$$

ところで

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3.16)$$

であるから

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0 \quad (3.17)$$

である。

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.18)$$

よって、

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.19)$$

が得られる。

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.20)$$

とおくと

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \quad (3.21)$$

となる。

式(3.21)を $[t_1, t_2]$ の区間で定積分すると

$$\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt \quad (3.22)$$

となる。

もし、積分区間でモーメントが0ならば

$$\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = 0 \quad (3.23)$$

となり角運動量が保存されることが分かる。

参考 内積（スカラー積）と外積（ベクトル積）について

3.5 エネルギーとエネルギー保存の法則

運動の法則

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.24)$$

に速度ベクトル \mathbf{v} を掛ける（内積）。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.25)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (3.26)$$

\mathbf{v} の大きさを v とすると

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \left[\frac{1}{2} m v^2(t) \right]_{t_1}^{t_2} \quad (3.27)$$

一方、

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.28)$$

であるから

$$\frac{1}{2} m v^2(t_2) - \frac{1}{2} m v^2(t_1) = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.29)$$

となり、運動エネルギーの変化分は外力のなす仕事に等しいことが分かる。

ところで、重力やバネの力は保存力と呼ばれており、保存力は位置のみによって決定される力である。

物体に作用する力が保存力の場合には、保存力を \mathbf{F} とすると

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.30)$$

と表される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2(t_2) - \frac{1}{2} m v^2(t_1) &= \int_{r_1}^{r_2} -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \\ &= -\int_{r_1}^{r_2} dU = -[U(P_2) - U(P_1)] = -(U_2 - U_1) \end{aligned} \quad (3.31)$$

U_1, U_2 はそれぞれ P_1 における位置エネルギーと P_2 における位置エネルギーの値である。

したがって、

$$T_1 = \frac{1}{2}mv^2(t_1) \tag{3.32}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2(t_2)$$

とおくと

$$T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1) \tag{3.33}$$

であり

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 = \text{const} \tag{3.34}$$

となる。

すなわち、保存力を受ける物体においては運動エネルギーと位置エネルギーの和が常に一定であることを意味している。

4 . 回路の基礎

4.1 回路の基礎

電気回路系を取り扱うためには、オームの法則をはじめとして基本法則を良く理解しておくことが重要である。

4.1.1 線形回路と非線形回路

線形は、今迄頻繁に聞いてきた言葉です。多分、線形代数あるいは線形数学として聞いたことと思います。簡単に説明すると $y = ax$ の世界を指していて、小学校での比例計算でその概念が与えられています。さて、 $y = ax$ はどのようなグラフかは全ての方が分かります。また、 $y = ax^2$ のグラフも描けると思います。ここで、 $y = f(x)$ について考えてみよう。いわゆる関数です。

ここで、

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \quad (4.1)$$

を考えてみよう。

$$f(x) = ax \quad (4.2)$$

の場合は、

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha x_1) &= a\alpha x_1 \\ f(\beta x_2) &= a\beta x_2 \\ f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= a(\alpha x_1 + \beta x_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

となり、式(4.2)は式(4.1)を満足していることが分かります。

一方、

$$f(x) = ax^2 \quad (4.4)$$

の場合は、

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha x_1) &= a\alpha^2 x_1^2 \\ f(\beta x_2) &= a\beta^2 x_2^2 \\ f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= a(\alpha x_1 + \beta x_2)^2 = a(\alpha^2 x_1^2 + \beta^2 x_2^2 + 2\alpha\beta x_1 x_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

となり、式(4.1)を満足しないことが分かります。

式(4.1)を満足する関数のことを線形関数と呼びます。また満足しない関数を非線形関数と呼ぶ。

これを回路に拡張すると以下ようになります。

ある電気回路に電圧 $e_i(t)$ を加えたら、出力電圧が $e_o(t)$ となったと仮定する。次に、入力電圧として $e_{i1}(t)$ を加えたら、出力電圧は $e_{o1}(t)$ となった。さらに $e_{i2}(t)$ を加えたら $e_{o2}(t)$ の出力電圧を得た。このとき、回路を一種の関数とみなし、

$$e_o(t) = f_c(e_i(t)) \quad (4.6)$$

とするとき、

$$e_{o1}(t) + e_{o2}(t) = f_c[e_{i1}(t) + e_{i2}(t)] \quad (4.7)$$

が成立する回路を線形回路と呼ぶ。成立しない回路は非線形回路と呼ばれる。線形回路では、重ねの理が成り立ち回路計算が非常に楽になります。重ねの理が成り立つ回路が線形回路というわけです。

参考 関数は、ある値を他の値に対応させる働きがありますが、式(4.6)のようにある関数を他の関数に対応させる $f_c(\cdot)$ を汎関数と呼んでいます。

4.1.2 集中定数と分布定数

抵抗、インダクタンス、キャパシタンスなどが一箇所に集中して存在する回路を集中定数回路と呼んでいます。みなさんは、このような回路を主として勉強してきました。ところが、このような取扱いでは十分な

解析ができない場合もあります。例えば、送電線を考えてみましょう。送電線の恒長が長くなると(70Km)、集中定数的な取扱いでは解析結果の精度が落ちることが指摘されています。恒長が短い場合は、 π 形またはL形等価回路などを用いて集中定数化して解析が行われています。また、有線通信などでも伝送線路を分布定数回路として取扱うことがおこなわれています。

分布定数系では、各種の回路素子の値が場所によって異なりますから、独立変数が時間だけでなく、位置も独立変数となりますので大変複雑になります。このような、システムは、偏微分方程式で表現することができます。このような分布定数システムは、電気回路だけでなく、伝熱工学、流体力学、構造力学などでも現われます。例えば、大気中での噴煙の拡散、海洋での水質汚濁、物体の加熱などを表現すると偏微分方程式になることが分かっています。

4.1.3 過渡と定常

よく我々は、過渡的であるとか過渡期にある、という表現をします。これは、ある状態から他の状態へ推移しているそのような状況を表現したものです。

このような状況は、物理・工学システムにも現われ観察することができます。二年次に行ったコンデンサの充放電の実験を思い出して下さい。

もっと直感的に理解するには、「停止している車はなかなか動かない、動いている車はなかなか止まらない」ということを考えれば十分だとおもいます。このような、システムには何か共通したものが存在するはずで、結論をいうと、システムにエネルギーを蓄積する要素が存在するためです。電気回路の要素のコイルは電磁的なエネルギーをコンデンサは静電エネルギーを蓄えることができました。

4.1.4 具体的にどのような勉強すればよいか

いろいろ述べましたが、最低やるべきことを述べることにします。

4.1.4.1 モデル化 - - 回路に成立する方程式を求めること - -

この段階では基本的な法則や原理などが適用されます。

電気回路は、電源と回路素子が接続されたものです。回路素子は抵抗、コイル、コンデンサだけですから、電源のことと回路素子3つの性質を先ず勉強することです。

電源には、電圧源と電流源があります。また、電源が発生する電圧や電流の波形によって、直流、交流などに分けられます。これを直流電源とか交流電源と呼んでいます。なお、直流、交流だけでなくもっと一般的な波形を発生する電源も考えられますがここでは省略します。

回路素子と電源の性質が理解できれば、オームの法則やキルヒホッフの法則を用いることにより、回路方程式を導くことができます。以上により、複雑な接続の回路でも方程式を導くことができます。

なお、回路方程式を求める場合、過渡解析を行いたいのか、あるいは定常解析を行いたいのかで回路方程式の形式が異なります。

4.1.4.2 解析 - - 回路に流れる電流や生じる電圧を求めること - -

モデル化の作業で求められた方程式を解くことが次のステップになります。ここでは、連立一次方程式の解法とか微分方程式の解法が必要になります。

連立一次方程式は簡単に解くことができますから何の問題もないとおもいます。

微分方程式の場合は、みなさんはラプラス変換を知っているのですから、微分方程式の解法それを利用することができます。

4.2 回路の要素とその性質

4.2.1 電源（電圧源，電流源）

電源には2つの種類があり、その内部抵抗（インピーダンス）はどのような性質を持つか。

一般の電源

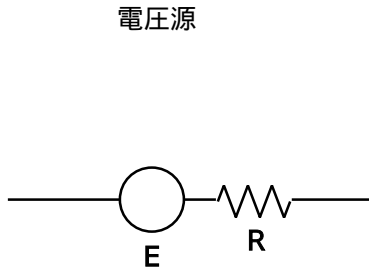


図4.1

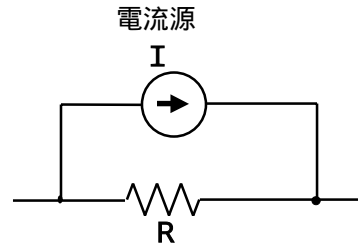


図4.2

理想電源

理想電圧源



図4.3

理想電流源

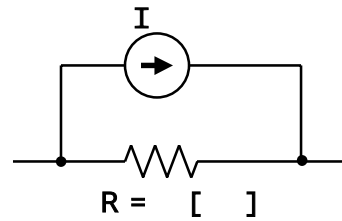


図4.4

4.2.2 回路素子（受動素子，受動回路）

回路素子には、抵抗、コイル、コンデンサの3種類しかない（能動素子を除く）。

これらの素子の電圧・電流関係はどのように表わされるか。



図4.5

4.2.3 回路素子の電圧・電流の関係

電気磁気学の基本的な知識も必要であるが、ここでは下記の関係があることをしっかり覚える。電気関係の技術者にとっては九九のようなものである。

$$\text{抵抗} \quad v(t) = Ri(t) \quad (4.8)$$

$$\text{コイル} \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.9)$$

$$\text{コンデンサ} \quad v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (4.10)$$

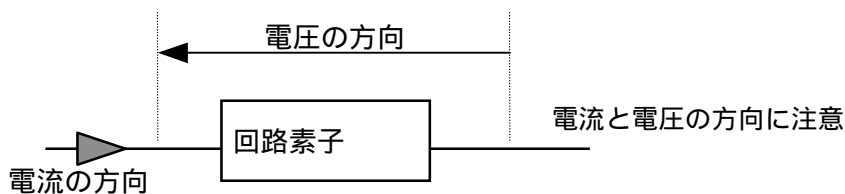


図4.6

4.2.4 オームの法則とキルヒホッフの法則

オームの法則（唯一の実験式）

電圧 = 抵抗 × 電流

キルヒホッフの法則

電流則 K C L

一点に流れ込む電流の総和は零である。

（節点電圧解析法）

電圧則 K V L

任意の網目の電圧（起電力、電圧降下）の総和は零である。

（網目電流解析法）

4.2.5 線形回路

重ねの理が成立する回路。

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \quad (4.11)$$

4.3 基本法則

4.3.1 キルヒホッフの法則

キルヒホッフの電流則

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (4.12)$$

キルヒホッフの電圧則

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0 \quad (4.13)$$

網目電流解析は、独立な網目に対してキルヒホッフの電圧則を適用する解析法である。

4.4 交流電源に対する取扱い

4.4.1 過渡と定常

ここでは、回路に電圧を加えた場合を考える。そして、流れる電流が時間が経過するとはかなく消え去る項といつまでも残る項に分けられる事を認識しよう。

ここで、R L 直列回路に $e(t) = E \sin \omega t$ を印加したときの回路に流れる電流を求めてみる。

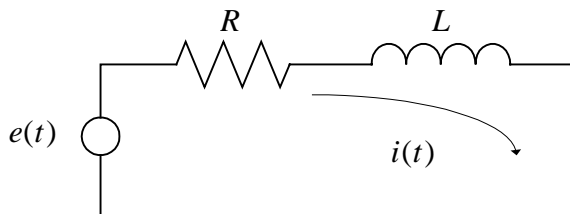


図 4.7

電圧平衡式として

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \sin \omega t \quad (4.14)$$

が成立する。

両辺をラプラス変換すると次式が得られる。

$$L[sI(s) + i(0)] + RI(s) = E \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (4.15)$$

よって、 $I(s)$ は次式で表わされる。

$$I(s) = \frac{Li(0)}{Ls + R} + \frac{E\omega}{(Ls + R)(s^2 + \omega^2)} = \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}} + \frac{\frac{E\omega}{L}}{(s + \frac{R}{L})(s^2 + \omega^2)} \quad (4.16)$$

上式は次のように変形することができる（部分分数展開）。

$$I(s) = \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}} + \frac{\frac{E\omega}{L}}{(s + \frac{R}{L})(s^2 + \omega^2)} = \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}} + \frac{k_1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{k_2s + k_3}{s^2 + \omega^2} \quad (4.17)$$

したがって、 k_1, k_2, k_3 は下記の恒等式を満足しなければならない。

$$k_1(s^2 + \omega^2) + (k_2s + k_3)(s + \frac{R}{L}) = \frac{E\omega}{L} \quad (4.18)$$

$$(k_1 + k_2)s^2 + (k_2\frac{R}{L} + k_3)s + k_1\omega^2 + k_3\frac{R}{L} = \frac{E\omega}{L} \quad (4.19)$$

よって、下記の連立方程式が得られる。

$$k_1 + k_2 = 0, k_2\frac{R}{L} + k_3 = 0, k_1\omega^2 + k_3\frac{R}{L} = \frac{E\omega}{L} \quad (4.20)$$

これより、 k_1, k_2, k_3 は次のように求められる。

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \\ k_2 &= \frac{-E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \\ k_3 &= \frac{E\omega R}{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

以上より、電流は下記のように表わされる。

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}} + \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{-E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{ER}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \left[i(0) + \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{E}{R^2 + (\omega L)^2} \left[R \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \omega L \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

上式をラプラス逆変換すると時間領域の電流は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} i(t) &= \left[i(0) + \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R^2 + (\omega L)^2} [R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t] \\ &= \left[i(0) + \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R^2 + (\omega L)^2} \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin \left[\omega t - \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] \\ &= \left[i(0) + \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin \left[\omega t - \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

ここで、上式の第1項と第2項に注目してみよう。

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \left[i(0) + \frac{E\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] e^{-\frac{R}{L}t} \\ i_2(t) &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin \left[\omega t - \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

第1項 $i_1(t)$ は、時間の経過とともに減衰してしまふことがわかる。第2項 $i_2(t)$ は、いつまでものこる項となる。第1項を過渡項、第2項を定常項と呼んでいる。

定常項のみを問題とする解析を定常解析と呼ぶ、それに対して過渡項も問題とする解析を過渡解析という。一般に、交流回路、交流理論などは定常解析の場合が多い。厳密な表現では、正弦波定常解析と呼んでいる。

5 . シミュレーション本論

本章では、比較的簡単な力学系のモデル化を行い、その振る舞いをシミュレーションにて検証しよう。
ここで、解析力学とラグランジュの運動方程式についてまとめておく。

システムの運動エネルギーを T

システムの位置エネルギーを V

システムの散逸関数を R

システムの外力を F とすると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (5.1)$$

が成立する

$$R = \frac{1}{2} \sum \beta_j \dot{q}_j^2 \quad \beta_j : \text{粘性抵抗係数} \quad (5.2)$$

また $L = T - V$ を定義すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (5.3)$$

となる

q_i : 一般化座標

\dot{q}_i : 一般化速度

5 . 1 力学系のシミュレーション

5 . 1 . 1 単振子の運動方程式とそのシミュレーション

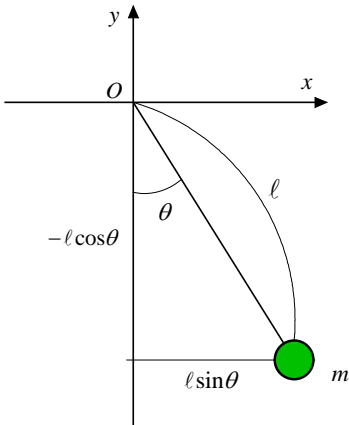


Fig.1

Fig.1の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$x = l \sin \theta \quad \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta$$

$$y = -l \cos \theta \quad \dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

また、位置エネルギー V は、 $V = -mgl \cos \theta$

よって、ラグランジアン L は

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta} \quad (5.5)$$

(5.4) , (5.5) を (5.3) に代入すると

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (5.6)$$

但し、粘性抵抗は0、外力なしと仮定した。

5.1.1 のシミュレーション

ここで、質量、振子長、重力加速度、初期角度が下記の場合の力学系の応答を計算する。

$$m = 1[\text{Kg}], \quad \ell = 0.5[\text{m}], \quad g = 9.8[\text{m/sec}], \quad \theta(0) = \pi/8[\text{rad}]$$

式(5)を下記のように変形する。

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

ここで、新変数として $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ を設定すると、与式は次式のように一階連立微分方程式に変換できる。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

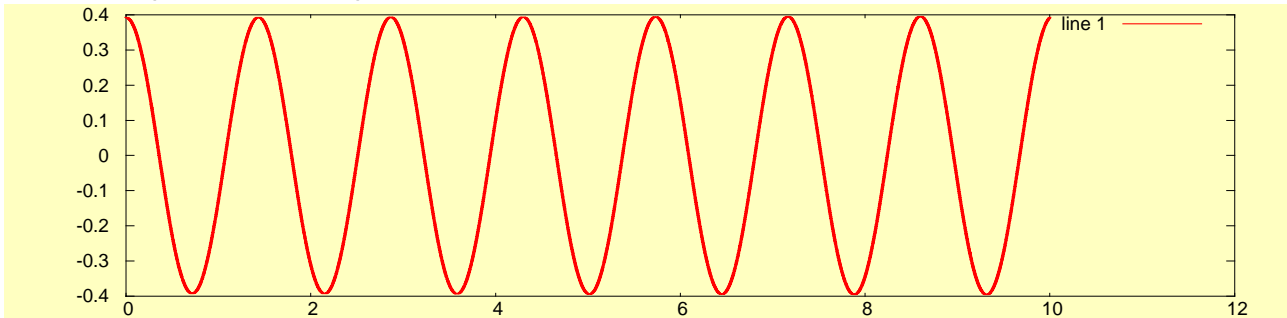
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin x_1$$

したがって、上式の数値計算プログラムは下記のようになる。

Octave 言語の場合

```
clear;
pi=3.1415926;
dt=0.0001;
ft=10.0;
n=ft/dt;
g=9.8;
l=0.5;
x1=pi/8.0;
x2=0.0;
for i=1:n,
x1dot=x2;
x2dot=-(g/l)*sin(x1);
x1=x1+x1dot*dt;
x2=x2+x2dot*dt;
tim(i)=i*dt;
y(i)=x1;
end;
plot(tim,y)
```

応答波形 (振子の角度変化)



5.1.2 5.1.1 と異なり棒の時、長さ $2l$ で質量中心が棒の中心にあり、質量が m とする。

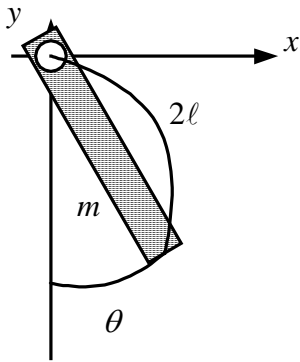


Fig.2

棒の場合、モーメントが生ずるので慣性による運動エネルギーも考慮する必要がある。

$$\begin{cases} x = l \sin \theta & \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \\ y = -l \cos \theta & \dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$V = -mgl \cos \theta$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

J は棒の慣性モーメント (重心回り)

$$J = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} + J \dot{\theta} \tag{5.8}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = (m l^2 + J) \ddot{\theta} \tag{5.9}$$

(5.7) (5.8) (5.9) を (5.3) に代入すると次式を得る。

$$(m l^2 + J) \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \tag{5.10}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

5.1.2 のシミュレーション

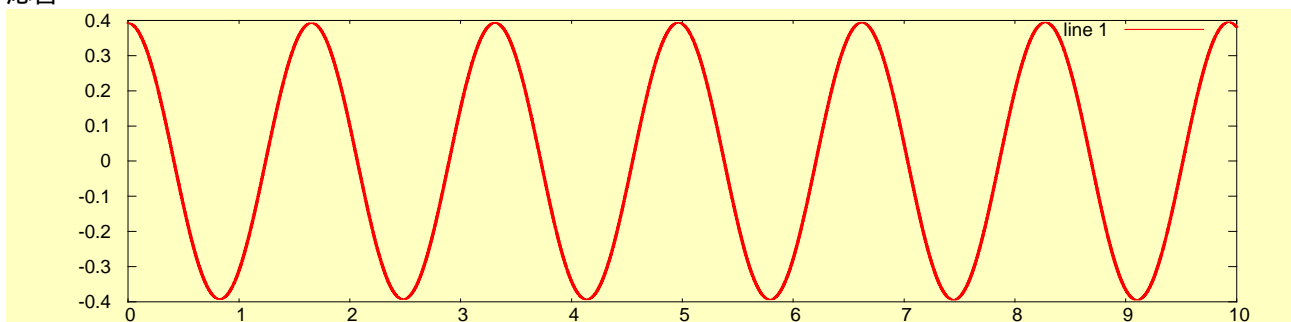
5.1.1 の場合と同等で係数 $3/4$ が追加されるだけである。

Octave 言語の場合

```
clear;
pi=3.1415926;
dt=0.0001;
ft=10.0;
n=ft/dt;
g=9.8;
l=0.5;
x1=pi/8.0;
x2=0.0;

for i=1:n,
x1dot=x2;
x2dot=-(3/4)*(g/l)*sin(x1);
x1=x1+x1dot*dt;
x2=x2+x2dot*dt;
tim(i)=i*dt;
y(i)=x1;
end;
plot(tim,y)
```

応答



5.1.3 5.1.2において、原点0の軸に粘性抵抗 μ があるとすると

$R = \frac{1}{2}\mu\dot{\theta}^2$ を考慮する必要がある。

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = \mu\dot{\theta} \quad (5.11)$$

(5.11) 式を考慮すると

$$(m\ell^2 + J)\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \quad (5.12)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3\mu}{4m\ell^2}\dot{\theta} + \frac{3g}{4\ell} \sin \theta = 0$$

を得る。

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

なる変数変換を行い、連立の一階微分方程式を求めると下記のようになる。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{3g}{4\ell} \sin x_1 - \frac{3\mu}{4m\ell^2} x_2$$

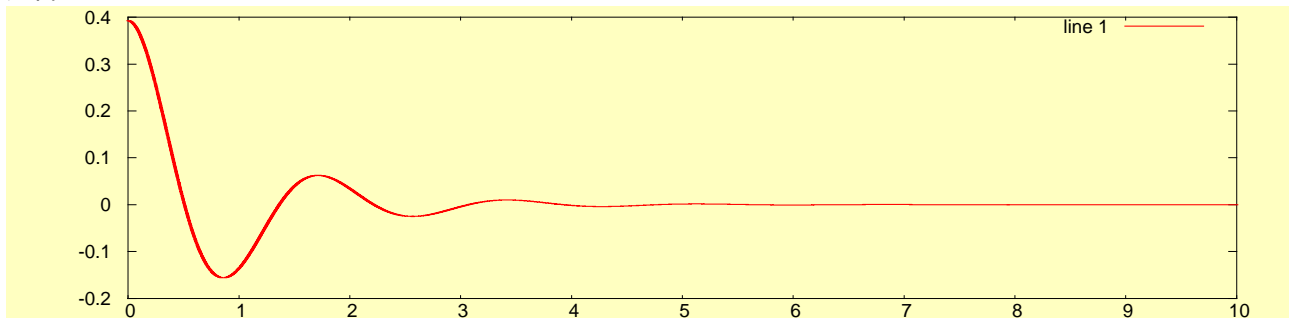
5.1.3 のシミュレーション用プログラム

Octave 言語の場合

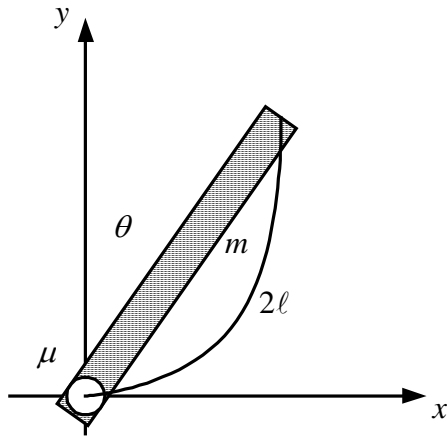
```
clear;
pi=3.1415926;
dt=0.0001;
ft=10.0;
n=ft/dt;
g=9.8;
mu=0.5;
l=0.5;
m=0.7;
a=3/4;
x1=pi/8.0;

x2=0.0;
for i=1:n,
x1dot=x2;
x2dot=-a*(g/l)*sin(x1)-a*mu/(m*l)*x2;
x1=x1+x1dot*dt;
x2=x2+x2dot*dt;
tim(i)=i*dt;
y(i)=x1;
end;
plot(tim,y)
```

応答



5.1.4 倒立振子のシミュレーション



重心の位置と速度

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = l \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} = -l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

運動および位置エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$V = m g l \cos \theta$$

Fig.3

ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m g l \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (m l^2 + J) \dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = (m l^2 + J) \ddot{\theta}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = \mu \dot{\theta}$$

$$R = \frac{1}{2} \mu \dot{\theta}^2, \quad J = \frac{1}{3} m l^2$$

$$(m l^2 + J) \ddot{\theta} + \mu \dot{\theta} - m g l \sin \theta = 0$$

(5.13)

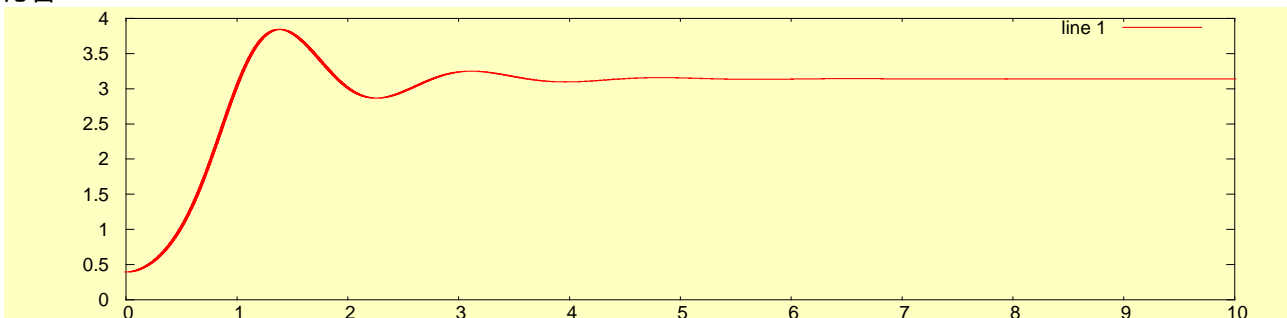
5.1.4のシミュレーション用プログラム

Octave 言語の場合

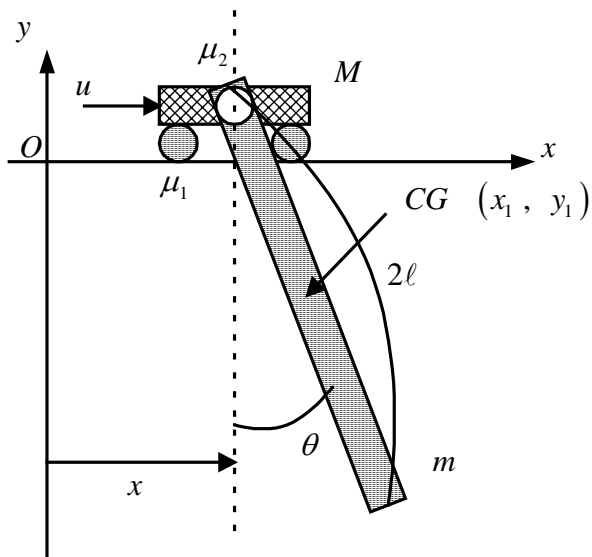
```
clear;
pi=3.1415926;
dt=0.0001;
ft=10.0;
n=ft/dt;
g=9.8;
mu=0.5;
l=0.5;
m=0.7;
J=m*l*l/3;
J1=m*l*l+J;

x1=pi/8.0;
x2=0.0;
for i=1:n,
x1dot=x2;
x2dot=(m*g*l/J1)*sin(x1)-(mu/J1)*x2;
x1=x1+x1dot*dt;
x2=x2+x2dot*dt;
tim(i)=i*dt;
y(i)=x1;
end;
plot(tim,y)
```

応答



5.1.5 クレーンのシミュレーション



$$\begin{cases} x_1 = x + l \sin \theta \\ y_1 = -l \cos \theta \end{cases}$$

システムの運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$V = -mgl \cos \theta$$

$$R = \frac{1}{2} \mu_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{\theta}^2$$

Fig.4

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

よって

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = \mu_1 \dot{x}$$

$$\therefore (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + \mu_1 \dot{x} = u \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{x} \cos \theta + ml^2 \dot{\theta} + J\dot{\theta}$$

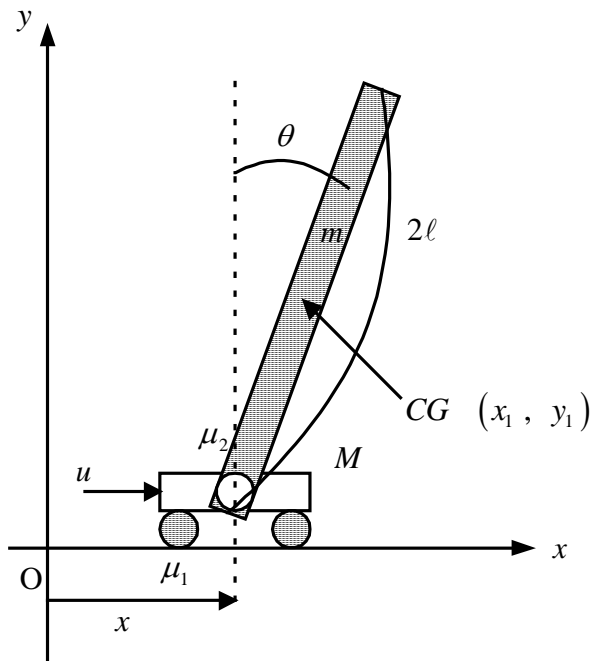
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml\ddot{x} \cos \theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + ml^2 \ddot{\theta} + J\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = \mu_2 \dot{\theta}$$

$$\therefore ml\ddot{x} \cos \theta + (ml^2 + J)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta + \mu_2 \dot{\theta} = 0 \quad (5.15)$$

式(5.14)、(5.15)が、Fig.4の力学系の運動方程式である。

5.1.6 倒立した場合



$$\begin{cases} x_1 = x + \ell \sin \theta \\ y_1 = \ell \cos \theta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$V = mg\ell \cos \theta$$

$$R = \frac{1}{2} \mu_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{\theta}^2$$

Fig.5

V の符号だけが例 5 と異なる。

よって、

$$(M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta + \mu_1\dot{x} = u \quad (5.16)$$

$$m\ell\ddot{x}\cos\theta + (m\ell^2 + J)\ddot{\theta} - mg\ell\sin\theta + \mu_2\dot{\theta} = 0 \quad (5.17)$$

が得られる。

式 (5.16)、(5.17) は 1 重倒立振子の数式モデルである。なお、式を行列表現すると下記のようになる。

$$\begin{bmatrix} M + m & m\ell\cos\theta \\ m\ell\cos\theta & m\ell^2 + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m\ell\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg\ell\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

慣性項 摩擦項 コリオリ・遠心項 重力項 外力

上式をよく眺めると力学系の性質がわかる。すなわち、慣性力、摩擦力、コリオリ・遠心力、重力項から成り立っていることが分かる。これらの総和が外力とバランスしている。これは、力学系の共通の性質である。

5.2 電気回路系のシミュレーション

5.2.1 RC回路の過渡応答

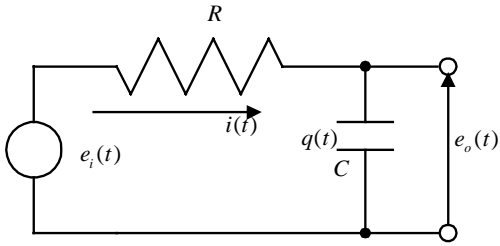


Fig.6

プログラムは下記のようになる。

電源は、Eボルトのステップ状電圧とする。

このとき次式が成立する。

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t \geq 0)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{de_o(t)}{dt}$$

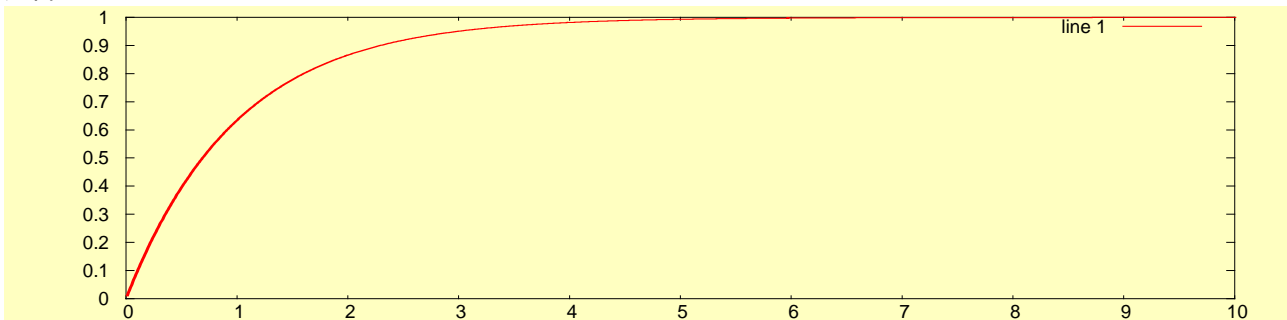
よって、次の微分方程式が得られる。

$$RC \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = E$$

```
clear;
R=1.0E+6;
C=1.0E-6;
E=1.0;
A=1.0/(R*C);
ft=10.0;
dt=0.01;
eo=0.0;

n=ft/dt;
for i=1:n,
    eodot=-A*eo+A*E;
    eo=eo+eodot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    e(i)=eo;
end;
plot(tim,e);
```

応答

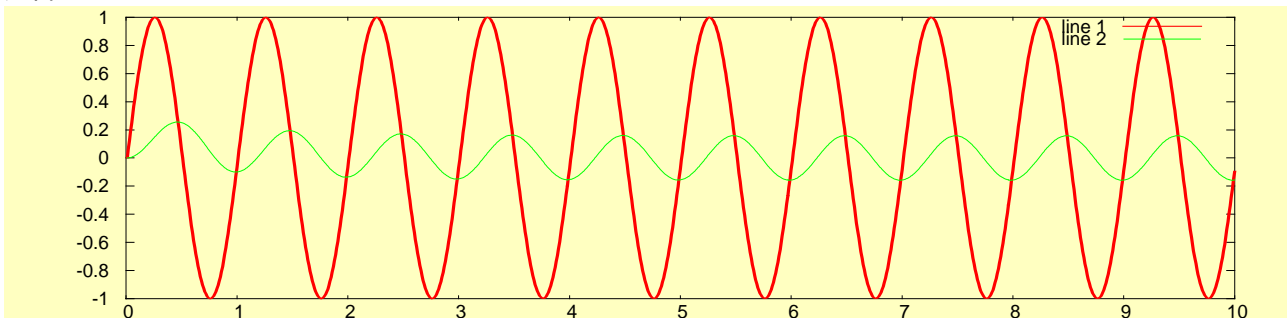


電源が、正弦波交流 ($e(t) = \sin(2\pi t)$) の場合は、

```
clear;
R=1.0E+6;
C=1.0E-6;
A=1.0/(R*C);
ft=10.0;
dt=0.01;
eo=0.0;
n=ft/dt;

for i=1:n,
    et=1*sin(6.28*(i-1)*dt);
    eodot=-A*eo+A*et;
    eo=eo+eodot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    ei(i)=et;e(i)=eo;
end;
plot(tim,ei,tim,e);
```

応答



5.2.2 R L C 直列回路の過渡応答

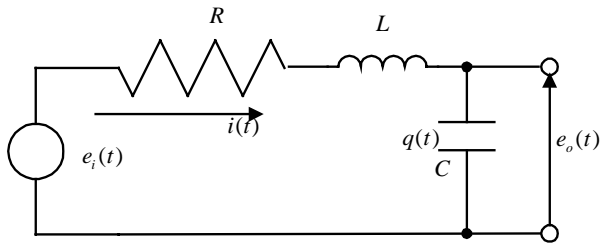


Fig.7

電源は、Eボルトのステップ状電圧とする。

このとき次式が成立する。

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t \geq 0)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{de_o(t)}{dt}$$

よって、次の微分方程式が得られる。

$$LC \frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + RC \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = E$$

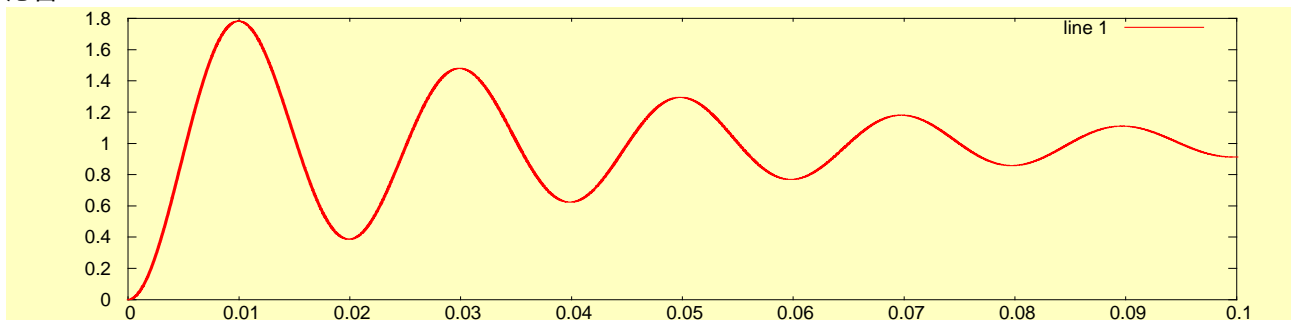
プログラムは下記のようになる。

プログラムでは、 $R=5.0$ [], $L=0.1$ [H]、 $C=100$ [μF]、 $E=1$ {V}としている。

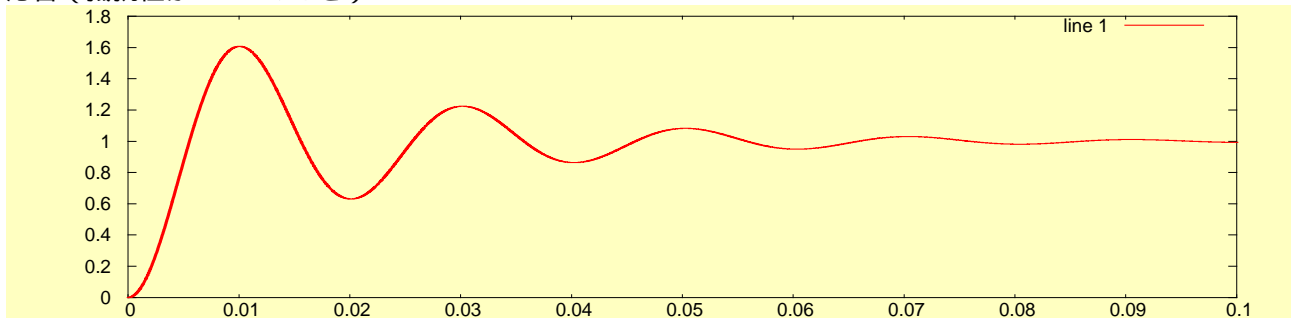
```
clear;
R=5.0;
L=0.1;
C=100.0E-6;
E=1.0;
A=1.0/(L*C);
B=R/L;
ft=0.1;
dt=0.00001;
x1=0.0;
x2=0.0;

n=ft/dt;
for i=1:n,
x1dot=x2;
x2dot=-A*x1-B*x2+A*E;
x1=x1+x1dot*dt;
x2=x2+x2dot*dt;
tim(i)=i*dt;
eo(i)=x1;
end;
plot(tim,eo);
```

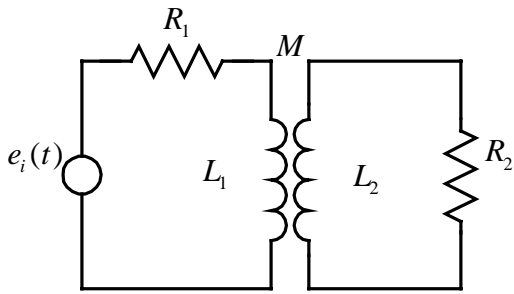
応答



応答 (抵抗値が 10 のとき)



5.2.3 相互誘導のある電気回路系



回路方程式

$$R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} = e_i(t)$$

$$R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} = 0$$

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

Fig.8

回路パラメータは、 $R_1 = R_2 = 2$ [Ω]、 $L_1 = L_2 = 2$ [mH]、 $M = 1.5$ [mH]とする。

ただし、 $e_i(t) = 10 \sin 5000t$ とする。

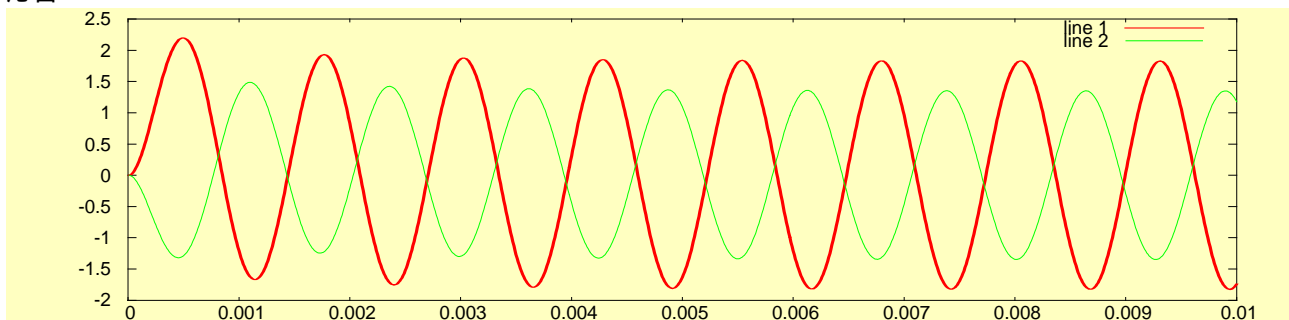
行列表現すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i(t) - R_1 i_1(t) \\ -R_2 i_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_i(t) - R_1 i_1(t) \\ -R_2 i_2(t) \end{bmatrix}$$

プログラム

```
clear;
R1=2;
R2=2;
L1=2e-3;
L2=2e-3;
M=1.5e-3;
det=L1*L2-M*M;
ft=0.01;
dt=0.00001;
n=ft/dt;
I1=0;
I2=0;
for i=1:n,
    ei=10*sin(5000*(i-1)*dt);
    I1dot=(-L2*R1*I1+M*R2*I2+L2*ei)/det;
    I2dot=(M*R1*I1-L1*R2*I2-M*ei)/det;
    I1=I1+I1dot*dt;
    I2=I2+I2dot*dt;
    y1(i)=I1;
    y2(i)=I2;
    tim(i)=i*dt;
end;
plot(tim,y1,tim,y2);
```

応答



5.3 その他のシミュレーション

5.3.1 バネ・質量系

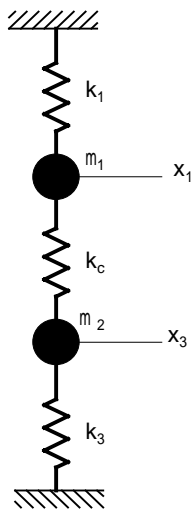


Fig.9 バネ・質量系

Fig.9の力学系に対して下記の微分方程式が成立する。

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 x_1 + k_c (x_1 - x_3) = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + k_2 x_3 + k_c (x_3 - x_1) = 0$$

ここで、

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt}, x_4 = \frac{dx_3}{dt}$$

とおくと

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{m_1} (k_1 + k_c) x_1 + \frac{1}{m_1} k_c x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4$$

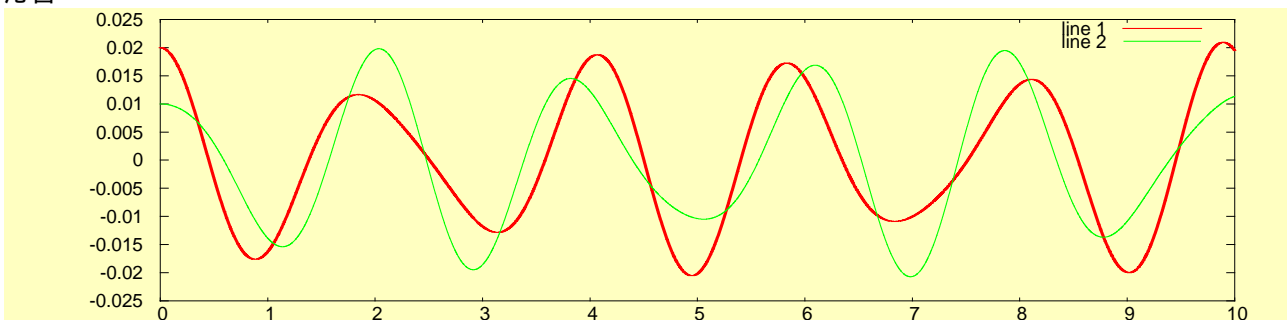
$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{k_c}{m_2} x_1 - \frac{1}{m_2} (k_2 + k_c) x_3$$

ただし、 $m_1 = m_2 = 1$ [kg]、 $k_1 = k_2 = 10$ [N/m]、 $k_c = 5$ [N/m]とする。また、 $x_1(0) = 0.02$ [m]、 $x_3(0) = 0.01$ [m]とする。

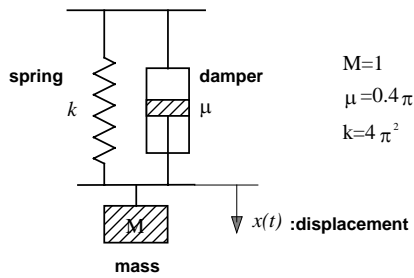
プログラム

```
clear;
k1=10;
k2=10;
kc=5;
m1=1;
m2=1;
ft=10;
dt=0.001;
n=ft/dt;
x1=0.02;
x3=0.01;
x2=0;
x4=0;
for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot=(-(k1+kc)*x1+kc*x3)/m1;
    x3dot=x4;
    x4dot=(kc*x1-(k2+kc)*x3)/m2;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    x3=x3+x3dot*dt;
    x4=x4+x4dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    y1(i)=x1;
    y2(i)=x3;
end;
plot(tim,y1,tim,y2);
```

応答



5.3.2 バネ・マス・ダンパー系



左記の系に対して次の微分方程式が成立する。

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \mu \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$$

$x_1(t) = x(t), x_2(t) = \dot{x}(t)$ とおき連立一階の微分方程式を求

めると次式のようなになる。

$$\dot{x}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -(k/M)x_1(t) - (\mu/M)x_2(t)$$

Fig.10

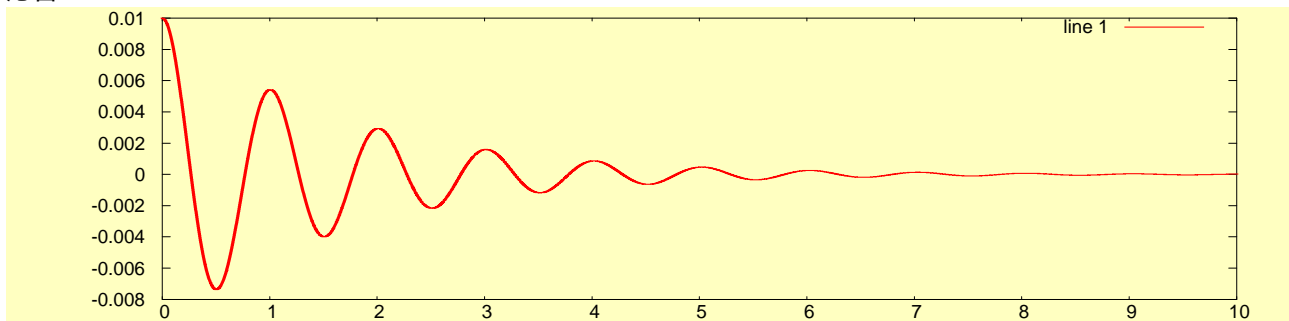
プログラム

```

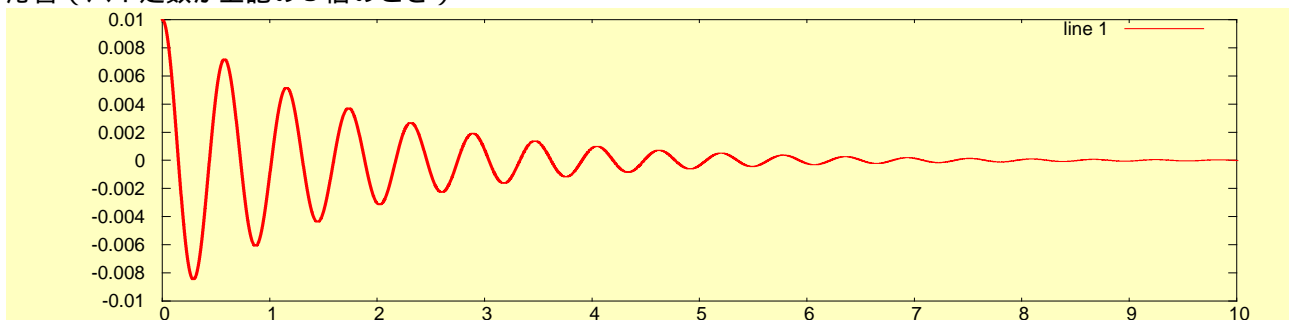
clear;
M=1;
pi=3.1415926;
mu=0.4*pi;
k=4*pi*pi;
x1=0.01;
x2=0;
ft=2;
dt=0.001;
n=ft/dt;

for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot=(-k*x1-mu*x2)/M;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    y(i)=x1;
end;
plot(tim,y);
    
```

応答



応答 (バネ定数が上記の3倍のとき)



5.3.3 回転系

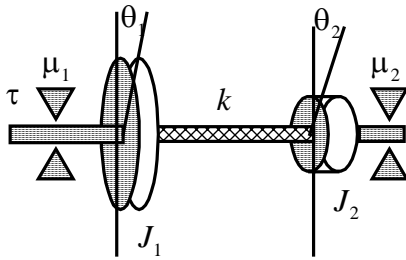


Fig.1 1

図に示すように2個の円盤がねじり剛性のある軸で接続されている場合を考える。また、両端の軸受けには摩擦があり、軸の片側にトルクが作用している場合を考える

$$J_1 \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + \mu_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} + k[\theta_1(t) - \theta_2(t)] = \tau$$

$$J_2 \frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} + \mu_2 \frac{d\theta_2(t)}{dt} + k[\theta_2(t) - \theta_1(t)] = 0$$

ただし、 $J_1 = 0.8$ 、 $J_2 = 1.0$ 、 $\mu_1 = 0.01$ 、 $\mu_2 = 0.02$ 、 $k = 0.05$ とする。

新しい変数として、 $x_1 = \theta_1$ 、 $x_2 = \dot{\theta}_1$ 、 $x_3 = \theta_2$ 、 $x_4 = \dot{\theta}_2$ とおくと、下記の連立微分方程式を得る。

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = [\tau - k(x_1 - x_3) - \mu_1 x_2] / J_1$$

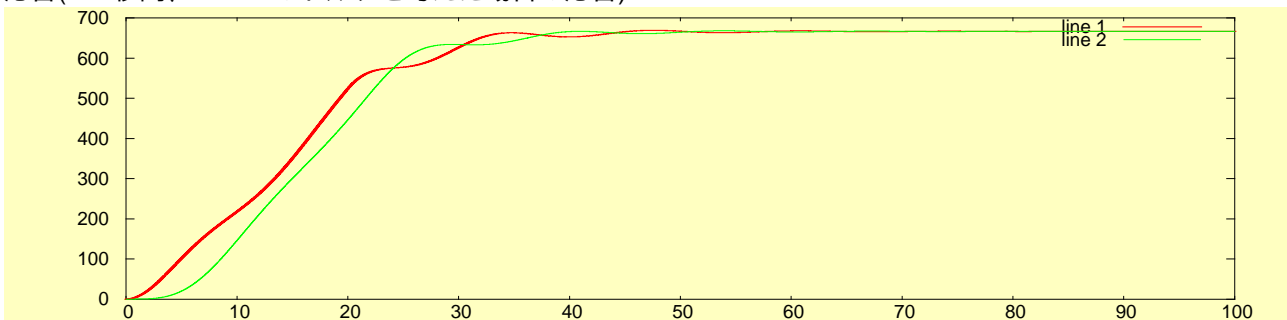
$$\frac{dx_3}{dt} = x_4$$

$$\frac{dx_4}{dt} = [-k(x_3 - x_1) - \mu_2 x_4] / J_2$$

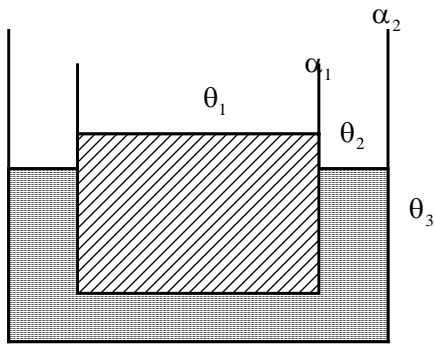
プログラム

```
clear;
J1=0.08;
J2=0.1;
mu1=0.01;
mu2=0.02;
k=0.01;
x1=0;
x2=0;
x3=0;
x4=0;
tau=1.0;
ft=100.0;
dt=0.001;
n=ft/dt;
for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot=(tau-k*(x1-x3)-mu1*x2)/J1;
    x3dot=x4;
    x4dot=(-k*(x1-x3)-mu2*x4)/J2;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    x3=x3+x3dot*dt;
    x4=x4+x4dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    y1(i)=x1;
    y2(i)=x3;
    if I*dt>20
        tau=0;
    end;
end;
plot(tim,y1,tim,y2);
```

応答(20秒間、1Nmのトルクを与えた場合の応答)



5.3.4 熱系



2つのタンクがあり、それぞれに液体が入っており、その温度が θ_1, θ_2 とする。また、壁面の伝熱係数を α_1, α_2 とする。さらに、タンクの周辺温度を θ_3 とする。このとき、下記の方程式が成立する。

$$\frac{d\theta_1(t)}{dt} = \alpha_1[\theta_2(t) - \theta_1(t)]$$

$$\frac{d\theta_2(t)}{dt} = \alpha_1[\theta_1(t) - \theta_2(t)] + \alpha_3[\theta_3(t) - \theta_2(t)]$$

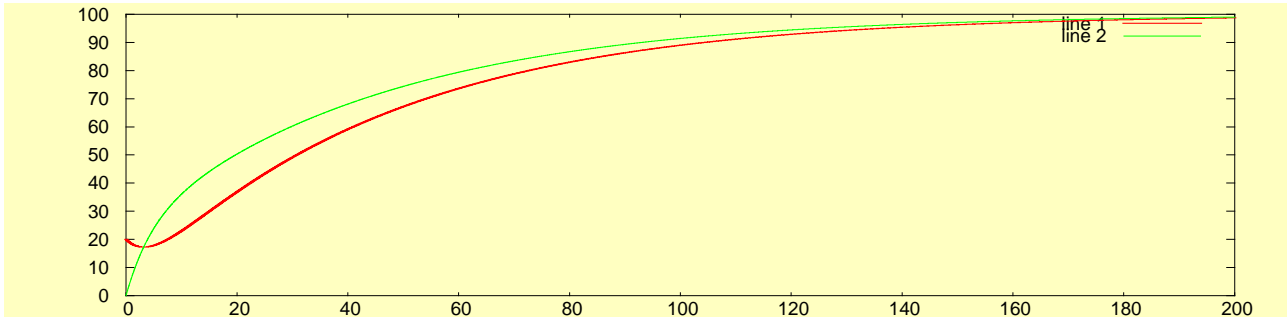
Fig.12

$\alpha_1 = 0.1$ 、 $\alpha_2 = 0.05$ 、 $\theta_1(0) = 20$ 、 $\theta_2(0) = 0$ 、 $\theta_3(t) = 100$ 、 $(0 \leq t)$ とする。

プログラム

```
clear;
al1=0.1;
al2=0.05;
t3=100;
ft=200;
dt=0.01;
n=ft/dt;
t1=20;
t2=0;
for i=1:n,
    t1dot=al1*(t2-t1);
    t2dot=al1*(t1-t2)+al2*(t3-t2);
    t1=t1+t1dot*dt;
    t2=t2+t2dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    temp1(i)=t1;
    temp2(i)=t2;
end;
plot(tim,temp1,tim,temp2);
```

応答



6 . 制御系の解析・設計・シミュレーション

第6章では、制御システムのシミュレーションの方法を習得する。

6 . 1 基本要素の過渡応答

6.1.1 標準 2 次系の単位ステップ応答 (インディシャル応答)

$$G(s) = \frac{k\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{2 次標準形}) \quad (6.1)$$

ただし、

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ \omega_n &= 2\pi[\text{rad / sec}] \\ \zeta &= 2.0, 1.0, 0.7, 0.4 \end{aligned}$$

とする。

ω_n : 固有角周波数

ζ : 減衰係数

制御系の入力を r 出力を y とすると下記の微分方程式が成立する。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = k\omega_n r \quad (6.2)$$

ここで、新しい変数として

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad (6.3)$$

とおくと式 (2) は次式の連立 1 階微分方程式となる。

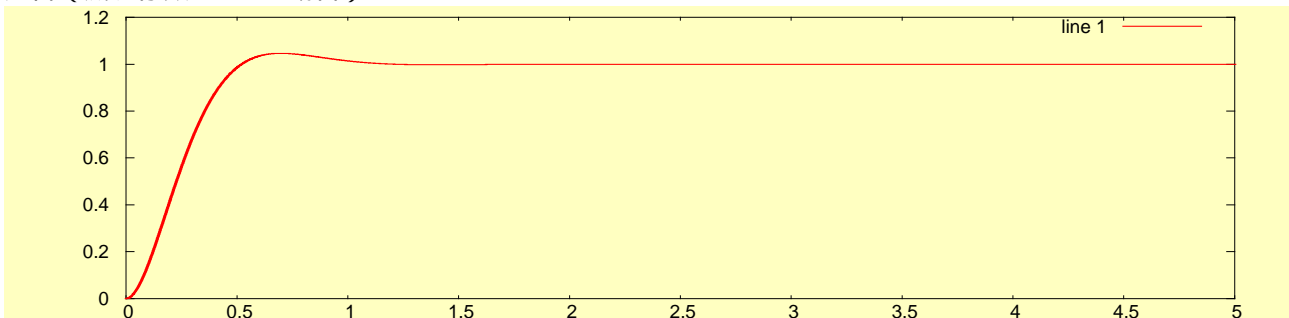
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + k\omega_n r \end{aligned} \quad (6.4)$$

プログラム例

```
clear;
R=1;
k=1;
wn=2*3.141592;
zeta=0.7;
ft=5.0;
dt=0.001;
n=ft/dt;
x1=0;
x2=0;

for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot= -wn*wn*x1-2*zeta*wn*x2+k*wn*wn*R;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    y(i)=x1;
end;
plot(tim,y);
```

応答 (減衰係数が0.7の場合)



6.1.2 n次系の単位ステップ応答（インディシャル応答）
 制御システムの伝達関数 $G(s)$ が次式で与えられた場合を考える。

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (6.5)$$

式(6.5)において、 $n \geq m$ とする。分母の最高次数の係数が1である伝達関数をモニックな伝達関数と呼ぶ。一般に、定係数線形制御システムの伝達関数は、必ず式(6.5)の形式となる(むだ時間要素なしの場合)。伝達関数は、すべての初期値を零としたときの入出力のラプラス変換比と定義されている。

例題 1

$G(s) = \frac{4s+3}{2s^2+6s+4}$ をモニックな伝達関数として表せ。分母の最高次数の係数が1の伝達関数をモニックと呼ぶ。

解答

$$G(s) = \frac{4s+3}{2s^2+6s+4} = \frac{2s+\frac{3}{2}}{s^2+3s+2}$$

n次系の過渡応答の計算

制御システムの入力としてステップ関数を与えたときの応答を過渡応答と呼んでいる。特に、単位ステップ関数に対する応答は、単位ステップ応答とかインディシャル応答と呼ばれている。さて、式(6.5)のシミュレーションの方法について考えよう。

$$G_1(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (6.6)$$

$$G_2(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m \quad (6.7)$$

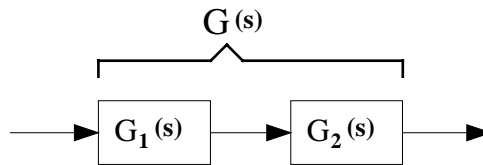


Fig.13

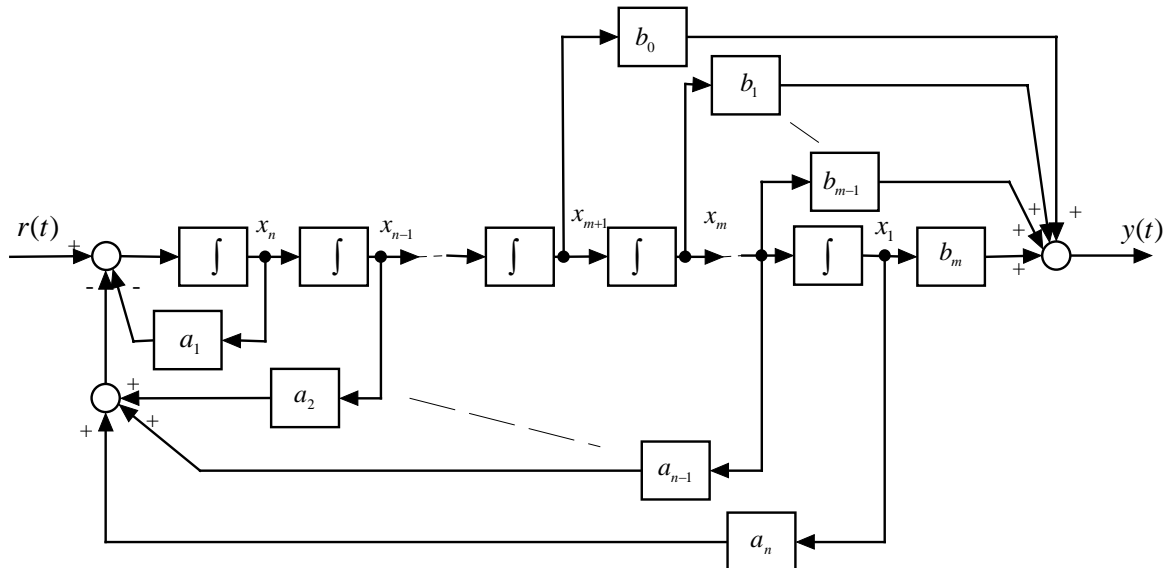


Fig.14

例題 2

$G(s) = \frac{4s+3}{2s^2+6s+4}$ の単位ステップ応答を計算せよ。

モニックな伝達関数は、

$$G(s) = \frac{4s+3}{2s^2+6s+4} = \frac{2s+\frac{3}{2}}{s^2+3s+2}$$

これを、ブロック図で表現するとFig.15となる。

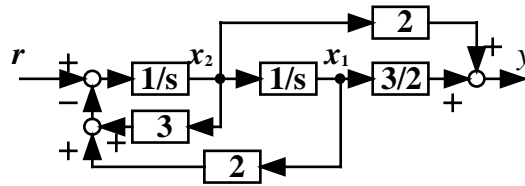


Fig.15

Fig.15 に成立つ微分方程式は

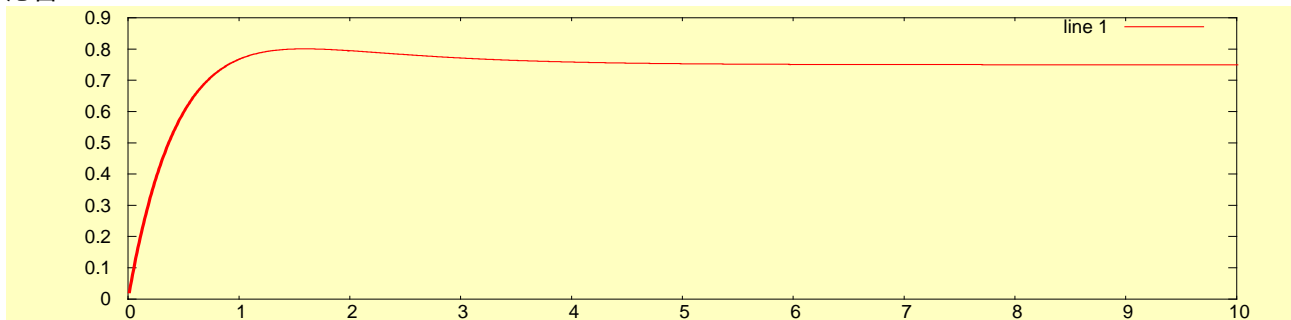
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 - 3x_2 + r \\ y &= \frac{3}{2}x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

となる。

プログラム

```
clear;
ft=10;
dt=0.01;
n=ft/dt;
x1=0;
x2=0;
r=1;
for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot=-2*x1-3*x2+r;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    y(i)=(3/2)*x1+2*x2;
end;
plot(tim,y);
```

応答



6.2 ブロック線図が与えられた場合

変数の割り当て方

1. 積分器の出力に変数を割り当てる。
2. 1次遅れ要素の出力に変数を割り当てる。
3. 1、2以外については、Fig.14の相変数表示を用いて、積分器の出力に変数を割り当てる。

例題

Fig.16の制御システムの出力 y を求めよ

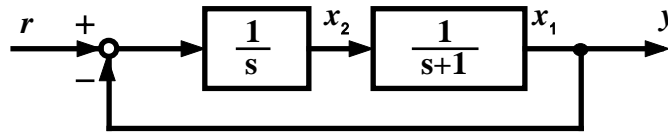


Fig.16

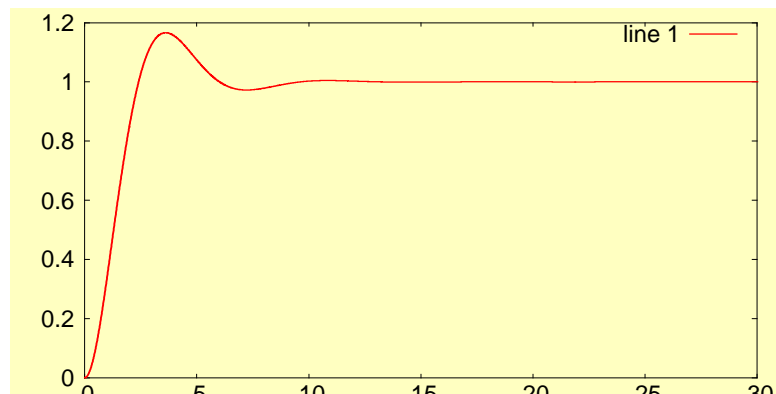
図のように、積分器と1次遅れ要素の出力に変数を割り当てると下記の微分方程式が成立する。

ラプラス変換領域	時間領域
$X_1(s) = \frac{1}{s+1} X_2(s)$	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$
$X_2(s) = \frac{1}{s} [R(s) - X_1(s)]$	$\frac{dx_2}{dt} = r - x_1$

プログラム

```
clear;
ft=30;
dt=0.01;
x1=0;
x2=0;
r=1;
n=ft/dt;
for i=1:n,
    x1dot=-x1+x2;
    x2dot=r-x1;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    y(i)=x1;
    tim(i)=i*dt;
end;
plot(tim,y);
```

応答



7 . 演習問題

第7章では、モデル化とシミュレーションの演習問題を取扱う。各問題に対して、解析解と数値解を求める。

【1】物理系の数式に関すること

物理系は、微分方程式で表現できる。

微分方程式とは導関数を含む方程式である。

物理系の数式モデルが微分方程式となる場合には、物理系を構成する要素としてエネルギーを蓄積するものが必ず存在する。

エネルギーを蓄積する要素は、力学系の場合は、質量とバネであり、電気系の場合は、コイルとキャパシタ（コンデンサ）である。

エネルギーを蓄積する要素が存在しない系の数式モデルは、代数方程式となる。

【2】物理系解析の種類

解析を大別すると、過渡解析と定常解析に分けられる。

過渡解析とは、ある時点から現在に至るまでの系の状態を調べることである。

定常解析とは、時間が十分に経過した時点での系の状態を調べることである。

過渡解析は、定常解析を含んでいる。

過渡解析とは、初期条件を満足する微分方程式の解を求めることである。

7.1 問題 1

Fig.1 に示す RL 回路において、 $t=0$ にてスイッチ SW. を ON にした。回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ。ただし、以下の順序で解答すること。

Step.1 モデル(回路に成立する数式)を求めよ。

Step.2 Step.1 で求めた式のラプラス変換形を求めよ。

Step.3 Step.2 で求めた式にラプラス逆変換を施し電流 $i(t)$ を求めよ。

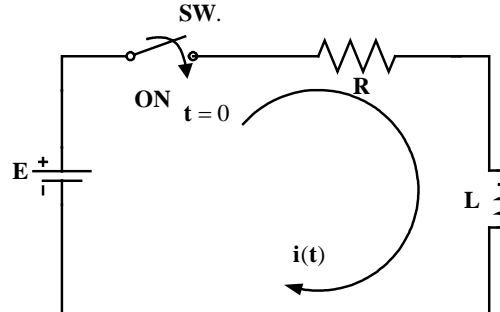


Fig.1 RL 回路

7.1.1 解析解

Step.1

Fig.2 に各素子に生じる電圧を示す。

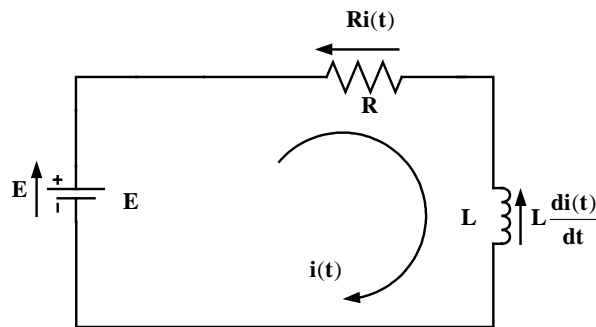


Fig.2

方向に注意し、電圧平衡式を求めると次式のようなになる。

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

Step.2

次に先ほど求めた式にラプラス変換を施す。まず、ラプラス変換について復習する。ラプラス変換の定義式は、

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = L\{f(t)\} \quad (2)$$

である。

ここで、

$$L\{i(t)\} = I(s) \quad (3)$$

とすると、大きさ E のステップ関数のラプラス変換は、

$$L\{E\} = \int_0^{\infty} Ee^{-st} dt = \left[-\frac{E}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{E}{s} \quad (4)$$

となり、

$\frac{di(t)}{dt}$ のラプラス変換は次のようになる .

$$L\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt = [e^{-st}i(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} i(t)e^{-st} dt = sI(s) - i(0) \quad (5)$$

$i(0)$ は初期条件

よって、式(1)にラプラス変換を施すと、

$$L\{sI(s) - i(0)\} + RI(s) = \frac{E}{s} \quad (6)$$

となる .

式(6)から、

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls + R)} + \frac{Li(0)}{Ls + R} \quad (7)$$

となる .

Step.3

式(7)に逆ラプラス変換を施す . 条件として、 $t=0$ とあるから SW . は OFF となり、 $i(0)=0$ (初期条件)となる .

よって、式(7)は、

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls + R)} \quad (8)$$

となる .

さらに、式(8)を

$$I(s) = \frac{\frac{E}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{R}{L}} \quad (9)$$

とする . 式(9)の右辺は、部分分数展開と呼ぶ .

式(9)において、左辺と右辺が等しくなるように k_1 , k_2 を求める .

$$\frac{\frac{E}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{k_1\left(s + \frac{R}{L}\right) + k_2s}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} \quad (10)$$

式(10)より、

$$\frac{E}{L} = k_1\left(s + \frac{R}{L}\right) + k_2s = (k_1 + k_2)s + k_1\frac{R}{L} \quad (11)$$

となり、式(11)より、

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1\frac{R}{L} = \frac{E}{L} \end{cases} \quad (12)$$

となる . 式(12)を解くと、次式を得る .

$$k_1 = \frac{E}{R} , k_2 = -\frac{E}{R} \quad (13)$$

よって,

$$I(s) = \frac{\frac{E}{R}}{s} - \frac{\frac{E}{R}}{s + \frac{R}{L}} \quad (14)$$

となる.

また, 指数関数 e^{-at} のラプラス変換は,

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad (15)$$

であるから, 式(14)の逆変換は,

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (16)$$

となる.

7.1.2 シミュレーション

微分方程式

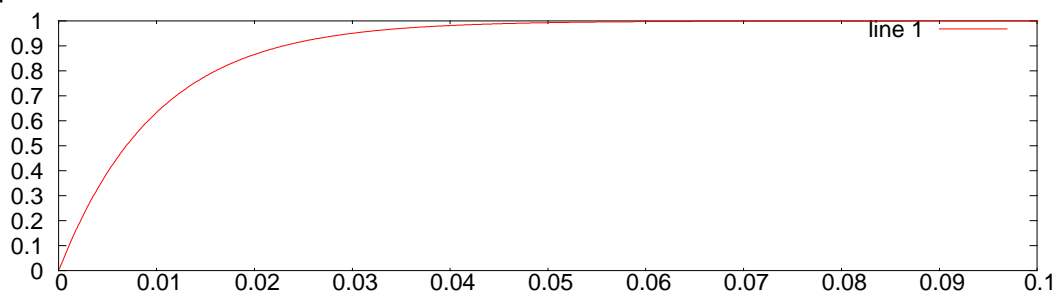
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \quad (t \geq 0) \quad (17)$$

の数値解を求める。

プログラム

```
clear;
L=10e-3;
R=1;
E=1;
ft=0.1;
dt=0.0001;
n=ft/dt;
I=0;
for j=1:n,
    Idot=-(R/L)*I+(1/L)*E;
    I=I+Idot*dt;
    tim(j)=j*dt;
    cur(j)=I;
end;
plot(tim,cur);
```

応答



7.2 問題2

Fig.1 に示す RC 回路に対して以下の問いに答えよ。ただし、 $t = 0$ で SW を ON とする。
モデル(回路方程式)を求めよ。

- 1 電流 $i(t)$ に関する方程式
- 2 電荷 $q(t)$ に関する方程式
- 3 電圧 $v(t)$ に関する方程式

$i(t), q(t), v(t)$ を求めよ。ただし、コンデンサには初期電荷はないものとする。 $(q(0) = 0)$

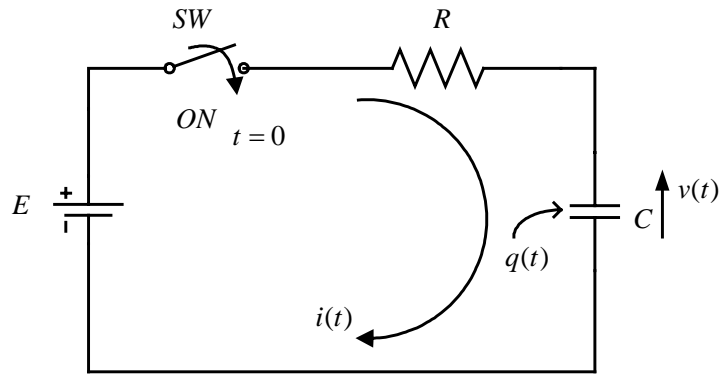


Fig.1

解答

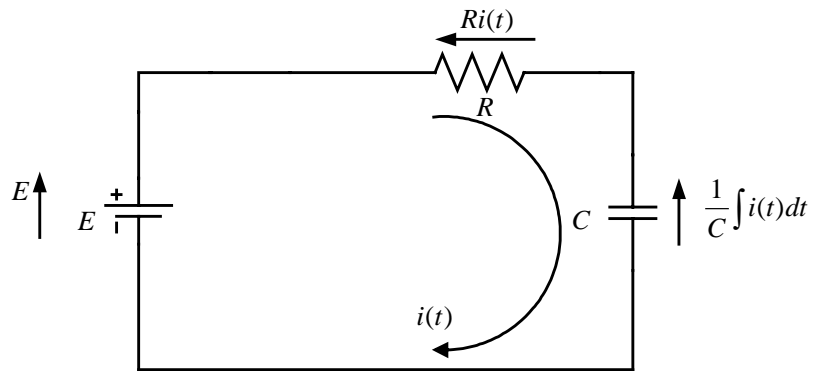


Fig.2

Fig.2 より

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E \quad (1)$$

となる。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2)$$

であるから、式(2)を式(1)に代入すると

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E \quad (3)$$

となる。さらに

$$q(t) = Cv(t) \quad (4)$$

を式(3)に代入すると

$$RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = E \quad (5)$$

が求められる.

式(3)をラプラス変換すると

$$R\{sQ(s) - q(0)\} + \frac{1}{C}Q(s) = \frac{E}{s} \quad (6)$$

となる.

題意より, $q(0) = 0$ であるから

$$\left(Rs + \frac{1}{C}\right)Q(s) = \frac{E}{s} \quad (7)$$

$$Q(s) = \frac{E}{s\left(Rs + \frac{1}{C}\right)} = \frac{\frac{E}{R}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \quad (8)$$

式(8)を部分分数に展開すると, 次式となる.

$$Q(s) = \frac{\frac{E}{R}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{1}{RC}} \quad (9)$$

式(9)より

$$k_1 = CE, \quad k_2 = -CE \quad (10)$$

となる.

よって, 式(9)のラプラス逆変換を求めると

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (11)$$

となる. また

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (12)$$

$q(t) = Cv(t)$ より, $v(t) = \frac{1}{C}q(t)$ であるから

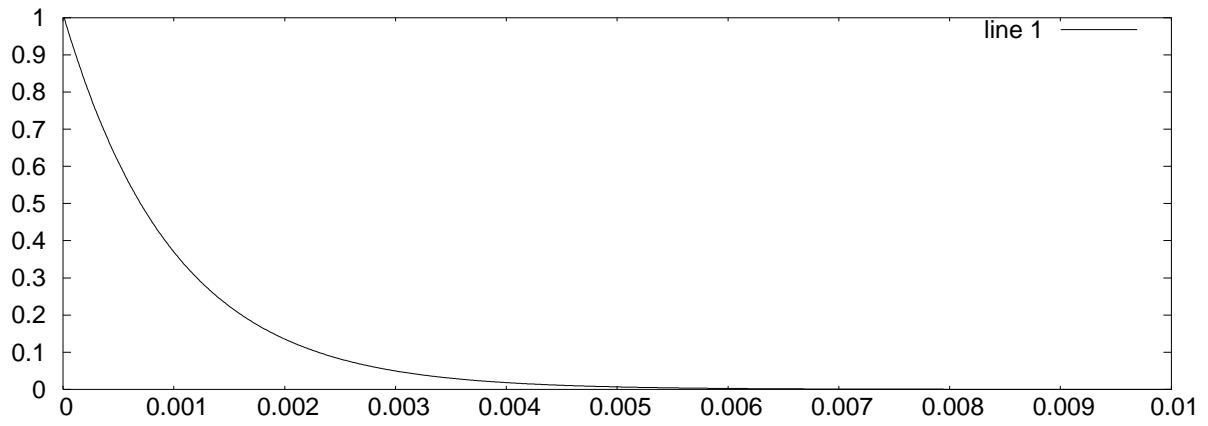
$$v(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (13)$$

となる.

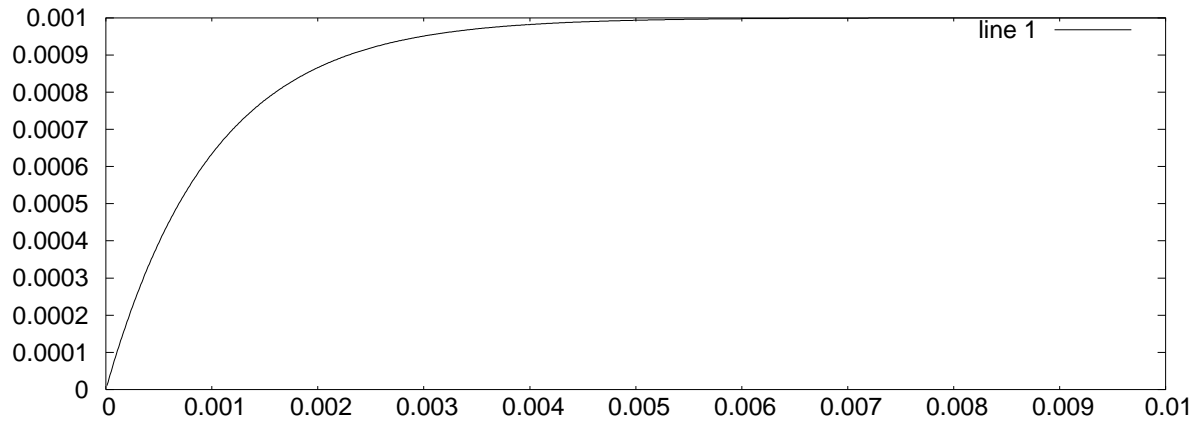
プログラム

```
clear;
R=10;
C=100e-06;
E=10;
ft=10e-3;
dt=1e-5;
n=ft/dt;
q=0;
T=R*C;
for i=1:n,
    qdot= -(1/T)*q+E/R;
    q=q+qdot*dt;
    v=q/C;
    cu=qdot;
    tim(i)=i*dt;
    cur(i)=cu;
    vc(i)=v;
    q1(i)=q;
end;
plot(tim,cur);
pause;
plot(tim,q1);
pause;
plot(tim,vc);
```

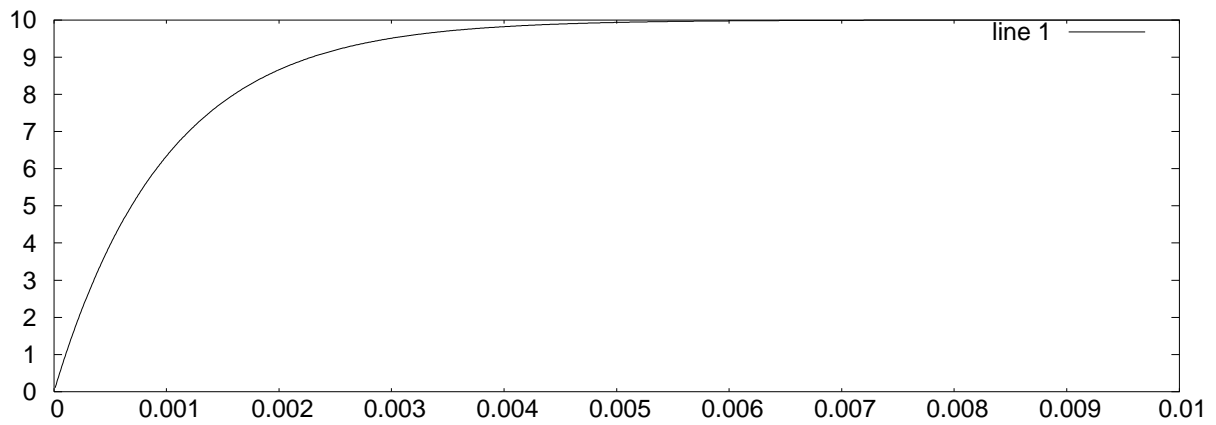
応答 (回路電流)



応答 (電荷)



応答 (コンデンサの電圧)



7.3 問題3

Fig.1 に示す RLC 回路に対して以下の問いに答えよ。ただし、コンデンサの初期電荷は 0 とする。
 電流 $i(t)$ に関する方程式を求めよ。
 電荷 $q(t)$ に関する方程式を求めよ。
 電圧 $v(t)$ に関する方程式を求めよ。

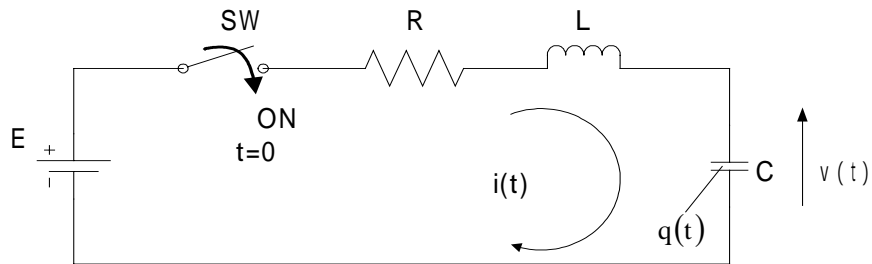


Fig.1 RLC 回路

解答

Fig.1 の回路において各素子にかかる電圧は Fig.2 のようになる。

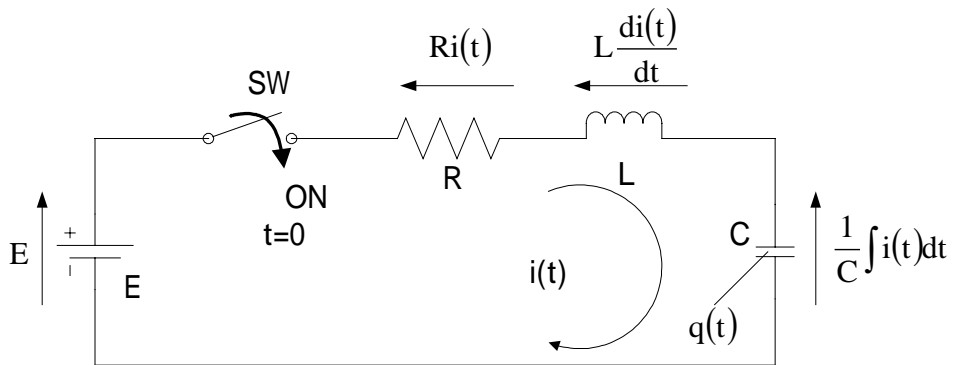


Fig.2

よってキルヒホッフの電圧則より、

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E \quad (1)$$

$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ であるので、式(1)に代入すると、

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E \quad (2)$$

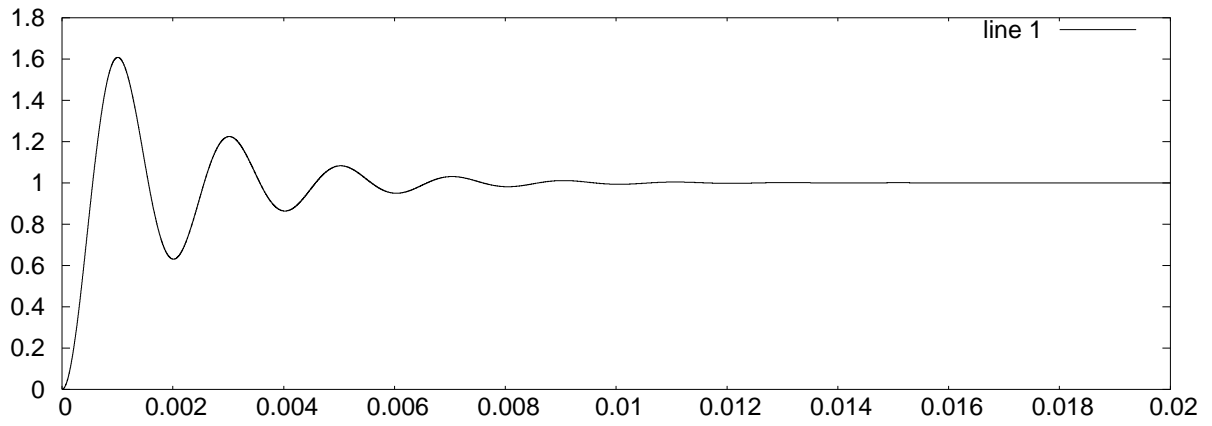
$q(t) = Cv(t)$ であるので、式(2)に代入すると、

$$LC \frac{d^2v(t)}{dt^2} + RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = E \quad (3)$$

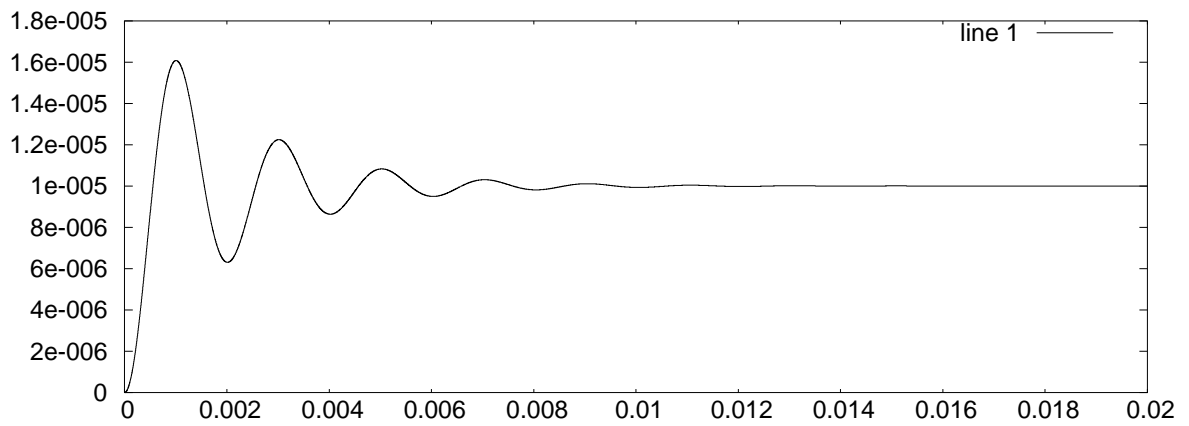
プログラム

```
clear;
R=10;
L=10E-3;
C=10e-6;
E=1.0;
ft=20e-3;
dt=1e-6;
n=ft/dt;
a=1/(L*C);
b=(R/L);
x1=0;
x2=0;
for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot=-a*x1-b*x2+a*E;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
v(i)=x1;
q(i)=C*x1;
cur(i)=C*x2;
end;
plot(tim,v);
pause;
plot(tim,q);
pause;
plot(tim,cur);
```

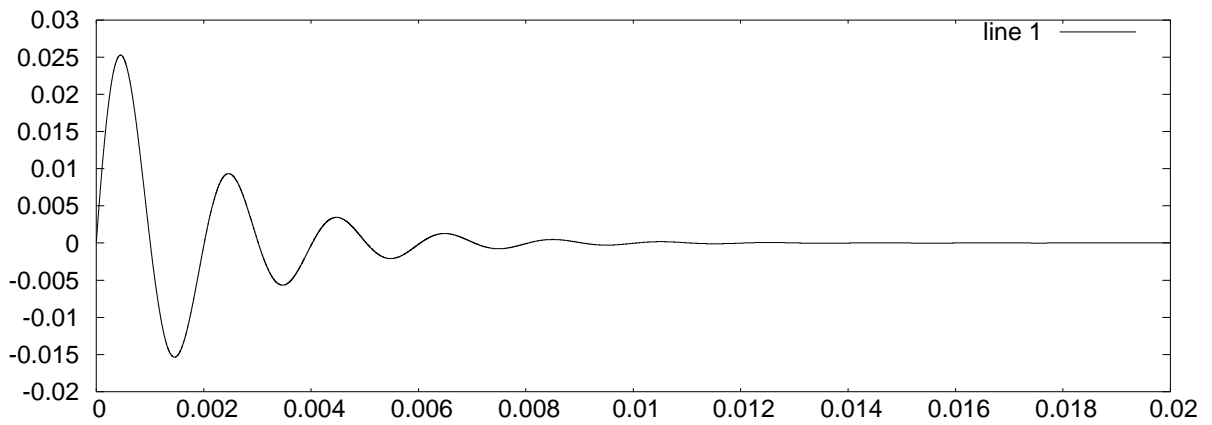
応答 (コンデンサの電圧)



応答 (電荷)



応答 (回路電流)



7.4 問題4

Fig1 において電流 $i_1(t)$, $i_2(t)$ を求めよ . $i_1(0) = i_2(0) = 0$ とする .

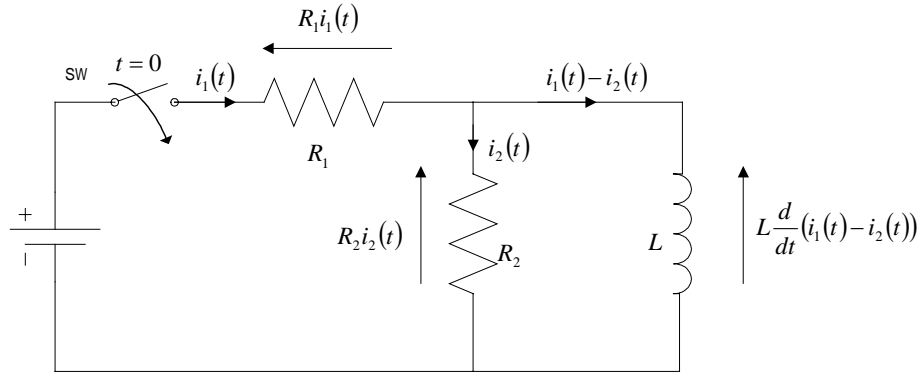


Fig1

解答

$$R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = E \quad (1)$$

$$L \frac{d}{dt} (i_1(t) - i_2(t)) - R_2 i_2(t) = 0 \quad (2)$$

式(1) , (2)をラプラス変換すると ,

$$R_1 I_1(s) + R_2 I_2(s) = \frac{E}{s} \quad (3)$$

$$L \{s I_1(s) - i_1(0) - s I_2(s) + i_2(0)\} - R_2 I_2(s) = 0 \quad (4)$$

となる . $i_1(0) = i_2(0) = 0$ であるから , 式(4)は次式のように整理できる .

$$L s I_1(s) - (L s + R_2) I_2(s) = 0 \quad (5)$$

式(3)と式(5)を行列形式で表記すると次式になる .

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ L s & -(L s + R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式(6)より

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{E}{s} & R_2 \\ 0 & -(L s + R_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ L s & -(L s + R_2) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{E(L s + R_2)}{s}}{-R_1(L s + R_2) - R_2 L s} = \frac{E(L s + R_2)}{s((R_1 + R_2)L s + R_1 R_2)} \quad (7)$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & \frac{E}{s} \\ L s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ L s & -(L s + R_2) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{E L s}{s}}{-R_1(L s + R_2) - R_2 L s} = \frac{E L}{(R_1 + R_2)L s + R_1 R_2} \quad (8)$$

式(7) , (8)のラプラス逆変換を求める .

$$i_1(t) = L^{-1} \left[\frac{E(L s + R_2)}{s((R_1 + R_2)L s + R_1 R_2)} \right] = L^{-1} \left[\frac{E L}{(R_1 + R_2)L s + R_1 R_2} \right] + L^{-1} \left[\frac{E R_2}{s((R_1 + R_2)L s + R_1 R_2)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= L^{-1} \left[\frac{\frac{E}{R_1 + R_2}}{s + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L}} \right] + L^{-1} \left[\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L}} \right] = \frac{E}{R_1 + R_2} e^{\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} t} + L^{-1} \left[\frac{\frac{E}{R_1}}{s} - \frac{\frac{E}{R_2}}{s + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L}} \right] \\
&= \frac{E}{R_1 + R_2} e^{\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} t} + \frac{E}{R_1} \left(1 - e^{\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} t} \right) \tag{9}
\end{aligned}$$

$$i_2(t) = L^{-1} \left[\frac{EL}{(R_1 + R_2)Ls + R_1 R_2} \right] = L^{-1} \left[\frac{\frac{EL}{(R_1 + R_2)L}}{s + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L}} \right] = \frac{E}{R_1 + R_2} e^{\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} t} \tag{10}$$

【参考】

$t = \infty$ での $i_1(t)$ と $i_2(t)$ を求めよ .

$$i_1(\infty) = \frac{E}{R_1}, \quad i_2(\infty) = 0$$

プログラム

モデル化された方程式

$$R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = E \tag{11}$$

$$L \frac{d}{dt} (i_1(t) - i_2(t)) - R_2 i_2(t) = 0 \tag{12}$$

に対して、次の変数変換を施す。

$$i(t) = i_1(t) - i_2(t) \tag{13}$$

式(11)(12)から i_2 を消去すると次式を得る。

$$R_1 i_1(t) + R_2 (i_1(t) - i(t)) = E \tag{14}$$

$$L \frac{d}{dt} i(t) - R_2 (i_1(t) - i(t)) = 0 \tag{15}$$

よって、式(14)から、

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i + \frac{1}{R_1 + R_2} E \tag{16}$$

式(16)を式(15)に代入すると次式となる。

$$L \frac{d}{dt} i(t) - R_2 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} i + \frac{1}{R_1 + R_2} E - i \right) = 0 \tag{17}$$

よって、

$$L \frac{d}{dt} i(t) + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \tag{18}$$

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i + \frac{1}{R_1 + R_2} E \tag{19}$$

$$i_2(t) = i_1(t) - i(t) \tag{20}$$

となる。

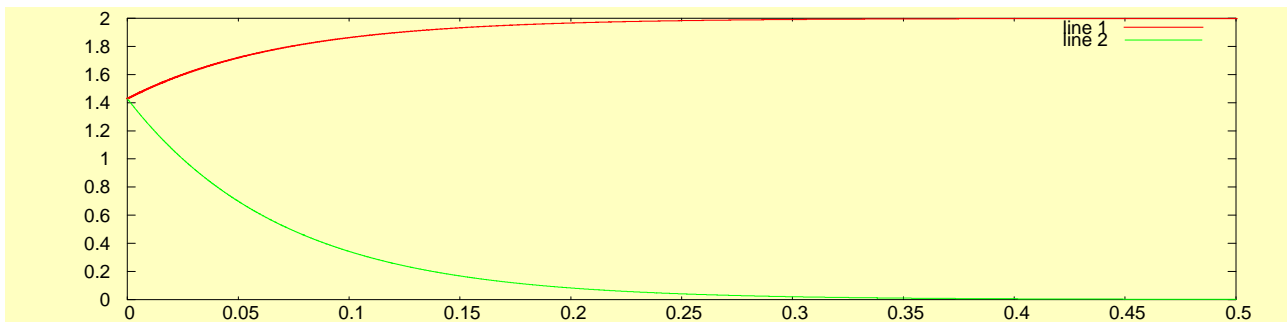
```

clear;
R1=5;
R2=2;
L=100e-03;
E=10;
ft=0.5;
dt=1e-4;
n=ft/dt;
I=0;
R12=R1+R2;

K=R2/R12;
R=K*R1;
for ii=1:n,
    Idot= -R/L*I+K/L*E;
    I=I+Idot*dt;
    i1(ii)=K*I+E/R12;
    i2(ii)=i1(ii)-I;
    tim(ii)=ii*dt;
end;
plot(tim,i1,tim,i2);

```

シミュレーション結果



7.5 問題5

Fig.1 のように、質量 $m[\text{kg}]$ の物体が高さ $h[\text{m}]$ で静止している。この状態から自由落下させた時のモデルを求め、解を導出せよ。また、重力加速度を $g[\text{m}/\text{s}^2]$ とし、摩擦は考えないものとする。

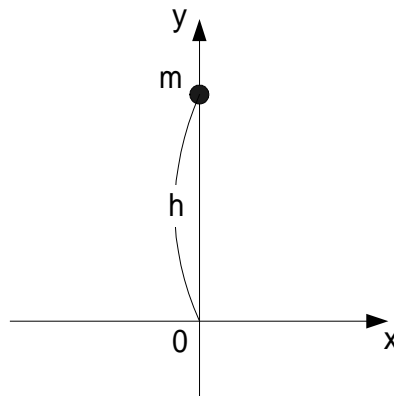


Fig.1

解答

y 軸を重力方向とすると、質量 m の物体の変位は $y(t)[\text{m}]$ となる。

その時の速度は

$$\frac{dy}{dt}[\text{m}/\text{s}] \tag{1}$$

であり、更に加速度は

$$\frac{d^2y}{dt^2}[\text{m}/\text{s}^2] \tag{2}$$

で表される。

よって、

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \tag{3}$$

が成立し、両辺 m で割ると

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{4}$$

となる。

式(4)を積分範囲 $[0, t]$ で積分する。

$$\int_0^t \frac{d^2y}{dt^2} dt = -\int_0^t g dt \tag{5}$$

$$\left. \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -gt \tag{6}$$

式(6)において

$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}$ は $t=0$ での速度(初期速度)のことである。題意より、 $t=0$ の時、静止状態であるから、 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$ である。

よって,

$$\frac{dy}{dt} = -gt \quad (7)$$

となり, 式(7)を更に積分すると

$$\int_0^t \frac{dy}{dt} dt = -\int_0^t g dt \quad (8)$$

$$y(t) - y(0) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (9)$$

ここで, 初期位置は高さ $h[m]$ であるから, $y(0) = h$ となる.

よって,

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (10)$$

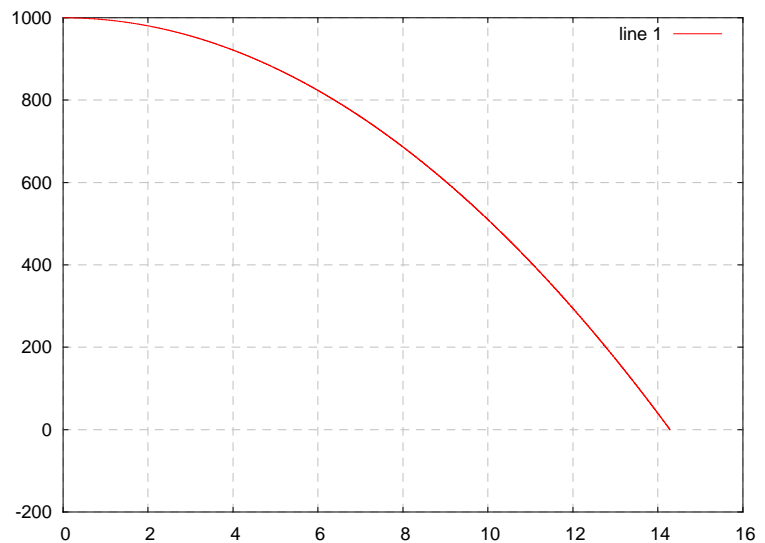
となる.

プログラム

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

```
clear;
g=9.8;
ft=100;
dt=0.001;
n=ft/dt;
x1=1000;
x2=0;
for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot=-g;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    h(i)=x1;
    if x1<0
        break;
    end;
end;
grid on;
plot(tim,h);
```

シミュレーション結果



7.6 問題6

Fig.1 に示すように地上 9800[m]上空を飛行機が時速800[km/h]で飛んでいる．この飛行機より物体を落下させたとき，物体は何 m 先に落下するか．ただし，摩擦は無視する．

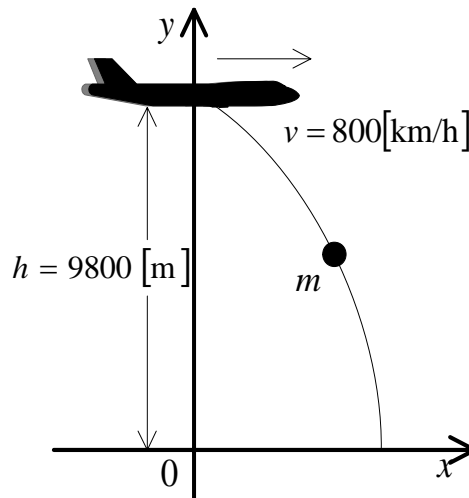


Fig.1

解答

現時点での飛行機の位置が x 軸の原点で，高さ h [m]にあるとする．ここで， x 軸方向および y 軸方向それぞれの運動方程式を立てると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \tag{1}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \tag{2}$$

式(1)，(2)が成立する．

式(1)を解く，つまり式(1)を積分すると

$$\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

更に，

$$\frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} = v_x(0) \tag{4}$$

とかけるので，式(3)は

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(0) \tag{5}$$

となる．

ここで， $v_x(0) = 800$ [km/h]より秒速[m/sec]に変換すると

$$v_x(0) = 800 \cdot 10^3 / (60 \cdot 60) = \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \text{ [m/sec]}$$

式(5)より，

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \tag{6}$$

更に，式(6)を積分すると

$$x(t) - x(0) = \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \cdot t \tag{7}$$

$x(0)$ は原点にあるため0となる．

従って,

$$x(t) = \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \cdot t \text{ [m]} \quad (8)$$

である.

次に, 式(2)より

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \quad (9)$$

を得る. 式(9)を積分すると

$$\left. \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -gt \quad (10)$$

ここで, $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}$ は物体は自由落下しているので, 初速度は0[m/sec]となる.

よって, 式(10)は

$$\frac{dy}{dt} = -gt \quad (11)$$

式(11)を更に積分すると

$$y(t) - y(0) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (12)$$

式(12)の $y(0)$ は9800[m]より

$$y(t) = 9800 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (13)$$

式(13)より地上に達する時間を求める, つまり

$$9800 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

より

$$t^2 = \frac{2 \cdot 9800}{g} = \frac{2 \cdot 9800}{9.8} = 2000$$

(\because 重力加速度 g は, $9.8[\text{m/s}^2]$)

$$t = \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}[\text{sec}] \quad (14)$$

よって, 物体の x 軸方向に進んだ距離は式(14)の時間を式(8)に代入して

$$\begin{aligned} x &= \frac{8}{3.6} \cdot 10^2 \cdot 20\sqrt{5} \\ &= \frac{16\sqrt{5}}{3.6} \times 10^3 \text{ [m]} \\ &= \frac{16\sqrt{5}}{3.6} \text{ [km]} \\ &= 9.9381 \text{ [km]} \end{aligned} \quad (15)$$

摩擦がないと約10[km]先に落下することになる.

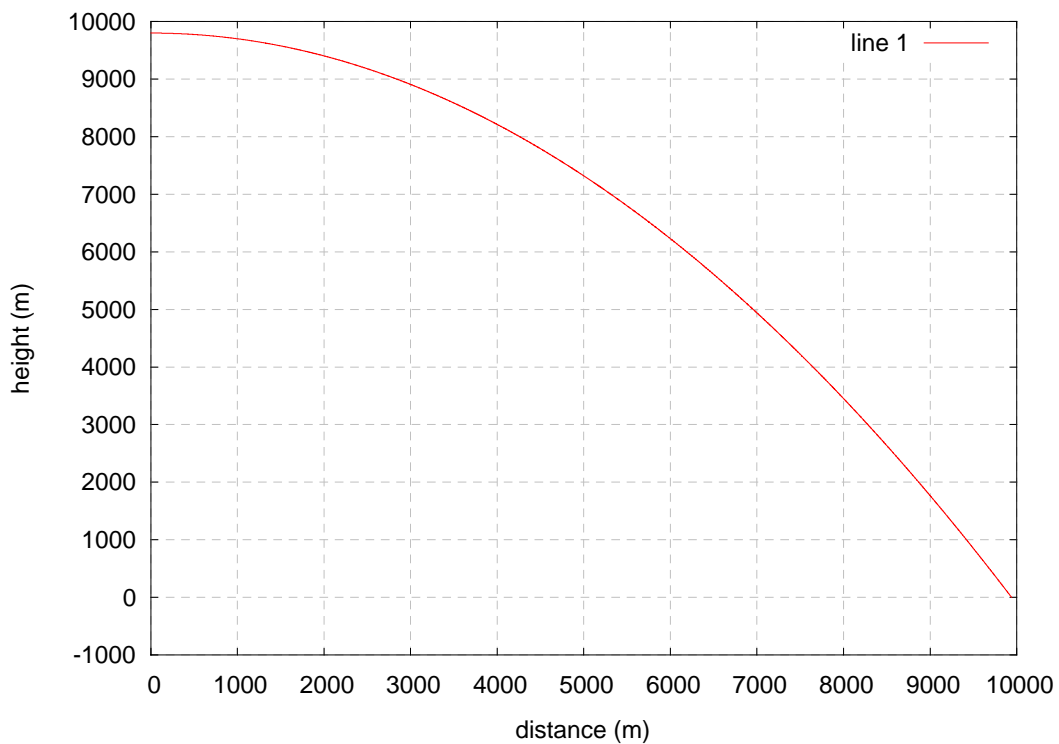
プログラム

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

```
clear;
h=9800;
v0=800e+3/(60*60);
g=9.8;
x1=0;
x2=v0;
y1=9800;
y2=0;
ft=100;
dt=0.01;
n=ft/dt;
for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot=0;
    y1dot=y2;
    y2dot=-g;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    y1=y1+y1dot*dt;
    y2=y2+y2dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    x(i)=x1;
    y(i)=y1;
    if y1<0
        break;
    end;
end;
grid on;
xlabel("distance (m)");
ylabel("height (m)");
plot(x,y);
```

シミュレーション結果



類似問題

Fig.2 に示すように，質量 m の物体を初速度 v_0 [m/sec] で打ち上げた．運動を解析せよ．

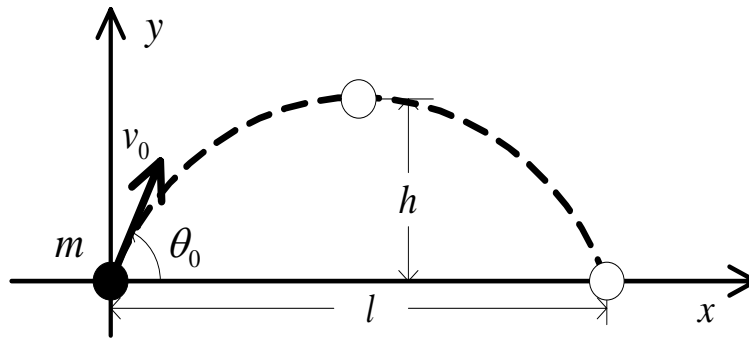


Fig.2

解答

物体は θ_0 方向に初速度 v_0 [m/sec] である．

x 軸， y 軸成分の速度は

$$\begin{aligned} v_x(0) &= v_0 \cos \theta_0 \\ v_y(0) &= v_0 \sin \theta_0 \end{aligned} \tag{1}$$

である．

x 軸， y 軸それぞれの運動方程式を考える

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \tag{2}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \tag{3}$$

である．

式(2)を解く，つまり積分すると

$$\left. \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}$ は初速度の x 軸方向成分なので，式(1)より

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta_0 \tag{4}$$

式(4)を積分すると

$$x(t) - x(0) = v_0 \cos \theta_0 \cdot t$$

$x(0)$ は，初期位置が原点なので 0

$$x(t) = v_0 \cos \theta_0 \cdot t \tag{5}$$

次に式(3)を解く，式(2)と同様に積分をおこなう

$$\left. \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -gt$$

同様に， $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}$ は初速度の y 軸方向成分なので，式(1)より

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \theta_0 - gt \tag{6}$$

式(6)を更に積分すると

$$y(t) - y(0) = v_0 \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} gt^2$$

$y(0)$ も，初期位置が原点なので 0

$$y(t) = v_0 \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (7)$$

ここで, Fig.2 に示した h, l の導出を行う

h は, $y(t)$ の最高点である, このときの時間を t_h と置く.

y 軸方向の速度は 0 なので, 式(6)より

$$v_0 \sin \theta_0 - g t_h = 0$$

より

$$t_h = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (8)$$

式(8)を式(7)に代入すると

$$h = y(t_h) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} [\text{m}] \quad (9)$$

次に, l は $y(t)$ が 0 となるとき (このときの時間を t_l とする) なので式(7)より

$$v_0 \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

より

$$\left(v_0 \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t \right) t = 0$$

となるので,

$$t = 0$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$$

となる.

$$t_l = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (10)$$

式(10)を式(5)に代入する

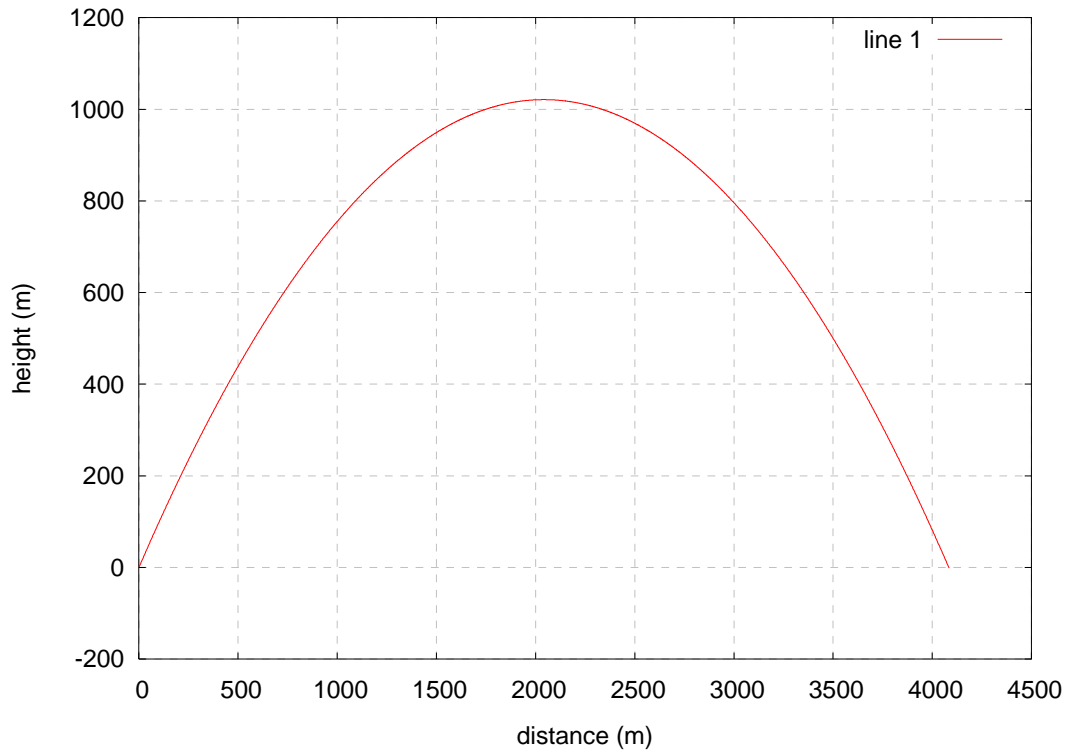
$$\begin{aligned} x(t_l) &= \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} [\text{m}] \end{aligned} \quad (11)$$

と表せる.

プログラム

```
clear;
v0=200;
th0=45/180*pi;
g=9.8;
x1=0;
x2=v0*sin(th0);
y1=0;
y2=v0*cos(th0);
ft=100;
dt=0.01;
n=ft/dt;
for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot=0;
    y1dot=y2;
    y2dot=-g;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    y1=y1+y1dot*dt;
    y2=y2+y2dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    x(i)=x1;
    y(i)=y1;
    if y1<0
        break;
    end;
end;
grid on;
xlabel("distance (m)");
ylabel("height (m)");
plot(x,y);
```

シミュレーション結果



備考 空気抵抗（摩擦）がある場合について考えてみよ。

運動方程式は、下記のようなになる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu_x \frac{dx}{dt} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu_y \frac{dy}{dt} = -mg$$

7.7 問題 7

自然長 l_0 [m] , バネ定数 k のバネがあるとする . (Fig.1 参照) 次の問いについて答えよ .

問 1 重さ m [kg] の物体をバネに接続した場合 , バネの伸びはどうか . (Fig.2)

問 2 また , Fig.3 の運動方程式を求めよ .

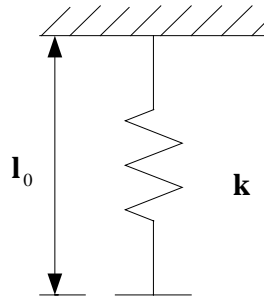


Fig.1

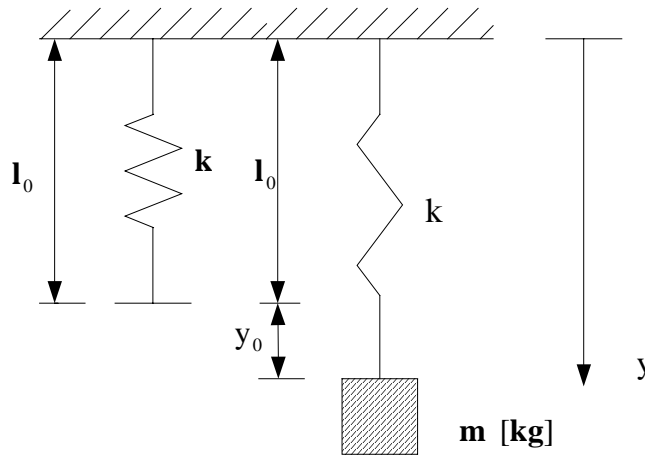


Fig.2

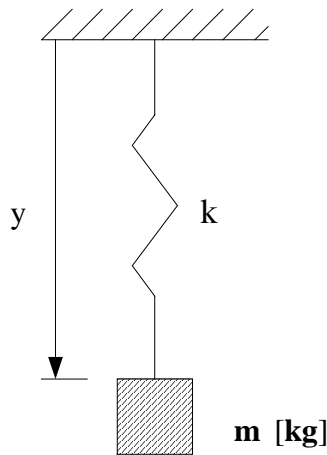


Fig.3

解答

問 1 変位を y_0 [m] とすると , フックの法則より ,

$$f = ky_0 \tag{1}$$

質量 m [kg] の物体にかかる重力加速度を g [m/s²] とすると , バネの伸びの式は次式となる .

$$ky_0 = mg$$

$$y_0 = \frac{mg}{k} \quad (2)$$

問 2

質量 $m[\text{kg}]$ の物体には、バネの復元力、重力の力が働く。

$$f_s = -k(y - l_0) \quad (3)$$

$$f_g = mg \quad (4)$$

よって、ニュートンの第二法則より、

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k(y - l_0) + mg \quad (5)$$

となる。

【参考】

バネの復元力と重力が釣り合うと、 $\frac{dy}{dt} = 0$ 、 $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ であるから、

$$0 = -k(y_e - l_0) + mg \quad (6)$$

となる。

式(6)より次の式が成り立つ。

$$k(y_e - l_0) = mg$$

$$y_e = \frac{mg + kl_0}{k}$$

$$= \frac{mg}{k} + l_0 \quad [\text{m}] \quad (7)$$

ここで、

$$w = y - y_e \quad (8)$$

と定義する。

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (9)$$

よって、式(5)に式(8)、(9)を代入すると、

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} = -k(w + y_e - l_0) + mg \quad (10)$$

また、 $ky_e = mg + kl_0$ であるから、

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} = -kw - ky_e + kl_0 + mg$$

$$= -kw - mg - kl_0 + kl_0 + mg$$

$$= -kw \quad (11)$$

式(11)は変化分に対する微分方程式となる。

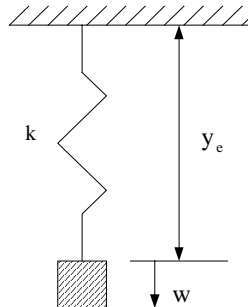


Fig.4

シミュレーションプログラムについては、先に述べた振動系の例を参照のこと。

7.8 問題 8

Fig.1 に示すように、半径 R の棒の先端に質量 m の物体が装着されており P_0 で静止している。物体が P_0 から動きだし、 P_1 に達したとき、リンクから切り離すと物体はどのような運動をするか運動方程式を導出せよ。

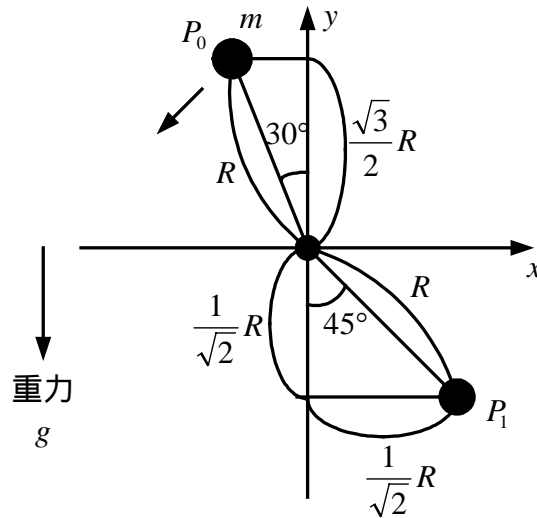


Fig.1

解答

P_1 での速度の大きさは、エネルギー保存則で求める。 P_1 からみた P_0 の位置 (y 軸成分) は

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}R + \frac{\sqrt{3}}{2}R \tag{1}$$

よって、位置エネルギー V は

$$\begin{aligned} V &= mg \left(\frac{1}{\sqrt{2}}R + \frac{\sqrt{3}}{2}R \right) \\ &= mgR \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}mgR(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \end{aligned} \tag{2}$$

となる。

P_1 での運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3}$$

式(2)と式(3)は等しいから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mgR(\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v^2 &= gR(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \end{aligned} \tag{4}$$

また、 P_1 の座標 (x, y) を θ で表わすと

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \\ y = -R \cos \theta \end{cases} \tag{5}$$

速度の x, y 成分は

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = R\dot{\theta} \cos \theta = v_x \\ \frac{dy}{dt} = R\dot{\theta} \sin \theta = v_y \end{cases} \quad (6)$$

速度は x と y 成分の合成より

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = R^2 \dot{\theta}^2 \quad (7)$$

よって,式(4),(7)より

$$\begin{aligned} gR(\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= R^2 \dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta} &= \frac{g(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{R} \end{aligned} \quad (8)$$

題意より $\theta = 45^\circ$ で切り離すから,式(6)に代入すると

$$\begin{cases} v_x = R\dot{\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v_y = R\dot{\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (9)$$

となる.

式(8)より

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{g} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{R}} \quad (10)$$

であるから,これを式(9)に代入すると

$$\begin{cases} v_x = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\ v_y = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (11)$$

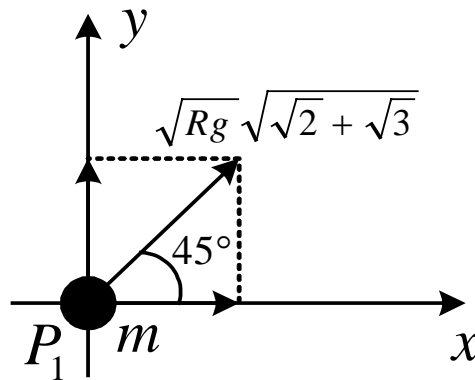


Fig.2

点 P_1 を改めて原点と考えると Fig.2 より

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{cases} \quad (12)$$

$$\quad (13)$$

初期条件として

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_x(0) = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\ \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_y(0) = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

式(12)を積分すると

$$\left. \frac{dx}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \quad (14)$$

式(14)をさらに積分すると

$$\therefore x(t) = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} t \quad (15)$$

式(13)を積分すると

$$\left. \frac{dy}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = -gt$$
$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - gt \quad (16)$$

式(15)をさらに積分すると

$$y(t) = \frac{\sqrt{Rg} \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (17)$$

と求められる.

プログラム

7.9 問題9

Fig.1 に示す回路に対して回路方程式を求めよ。ただし、コイルの電流 $i(t)$ を、コンデンサの両端の電圧を $v(t)$ 用いて方程式を作れ。

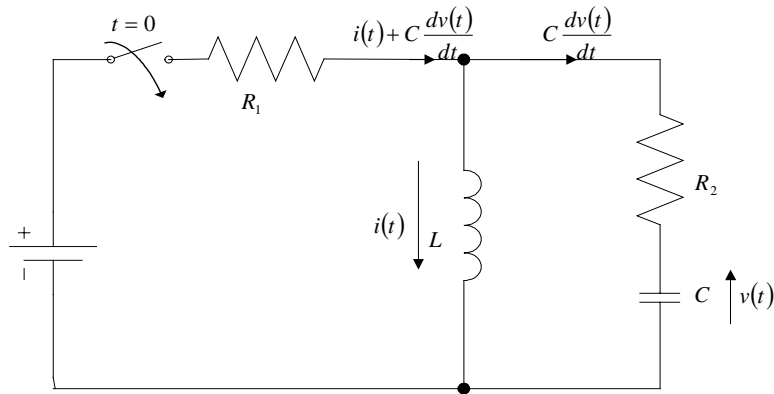


Fig.1

解答

コンデンサの電圧 $v(t)$ と電荷 $q(t)$ の関係は

$$q(t) = Cv(t) \quad (1)$$

である。

コンデンサに流れる電流を $i_c(t)$ とすると

$$i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (2)$$

となる。よって、 R_2 には $C \frac{dv(t)}{dt}$ なる電流が流れることになる。

また、 R_1 には $i(t)$ と $C \frac{dv(t)}{dt}$ が流れる。

以上のことにより

$$R_1 \left(i(t) + C \frac{dv(t)}{dt} \right) + L \frac{di(t)}{dt} = E \quad (3)$$

$$R_2 C \frac{dv(t)}{dt} + v(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad (4)$$

となる。

【参考】

解を求める。ただし、 $i_1(0) = 0$ 、 $i_2(0) = 0$ とする

式(3)、(4)をラプラス変換すると

$$R_1 I(s) + LsI(s) + R_1 CsV(s) = \frac{E}{s} \quad (5)$$

$$R_2 CsV(s) + V(s) - LsI(s) = 0 \quad (6)$$

となる。式(4)と式(5)を行列形式で表記すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} R_1 + Ls & R_1 Cs \\ -Ls & R_2 Cs + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(7)より

$$I(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{E}{s} & R_1 Cs \\ 0 & R_2 Cs + 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + Ls & R_1 Cs \\ -Ls & R_2 Cs + 1 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(R_2Cs+1)\frac{E}{s}}{(R_1+Ls)(R_2Cs+1)+R_1CLs^2} \\
&= \frac{(R_2Cs+1)\frac{E}{s}}{R_2CLs^2+R_1CLs^2+R_1R_2Cs+Ls+R_1} \\
&= \frac{(R_2Cs+1)E}{s\{(R_1+R_2)CLs^2+(R_1R_2C+L)s+R_1\}} \tag{8}
\end{aligned}$$

$$V(s) = \frac{LE}{(R_1+R_2)CLs^2+(R_1R_2C+L)s+R_1} \tag{9}$$

式(8), (9)をラプラス逆変換すれば解が出るが, 繁雑となる.

プログラム

式(3)(4)

$$\begin{aligned}
R_1\left(i(t)+C\frac{dv(t)}{dt}\right)+L\frac{di(t)}{dt} &= E \\
R_2C\frac{dv(t)}{dt}+v(t)-L\frac{di(t)}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

を行列とベクトルを用いて表現すると

$$\begin{bmatrix} R_1C & L \\ R_2C & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

となる。

ここで、

$$\begin{aligned}
M_1 &= \begin{bmatrix} R_1C & L \\ R_2C & -L \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

を用いて、微分方程式を表現すると次式を得る。

$$M_1\dot{\mathbf{x}} = M_2\mathbf{x} + V_1E$$

よって、

$$\dot{\mathbf{x}} = M_1^{-1}M_2\mathbf{x} + M_1^{-1}V_1E$$

となる。

プログラムでは、

$\dot{\mathbf{x}}$: xdot

\mathbf{x} : x

ベクトルの x(1)が電圧、x(2)が電流に対応している。

M_1 : MAT1

M_2 : MAT2

V_1 : VEC1

M_1^{-1} : MI

逆行列の計算には、inv関数が用意されている。

のように対応している。

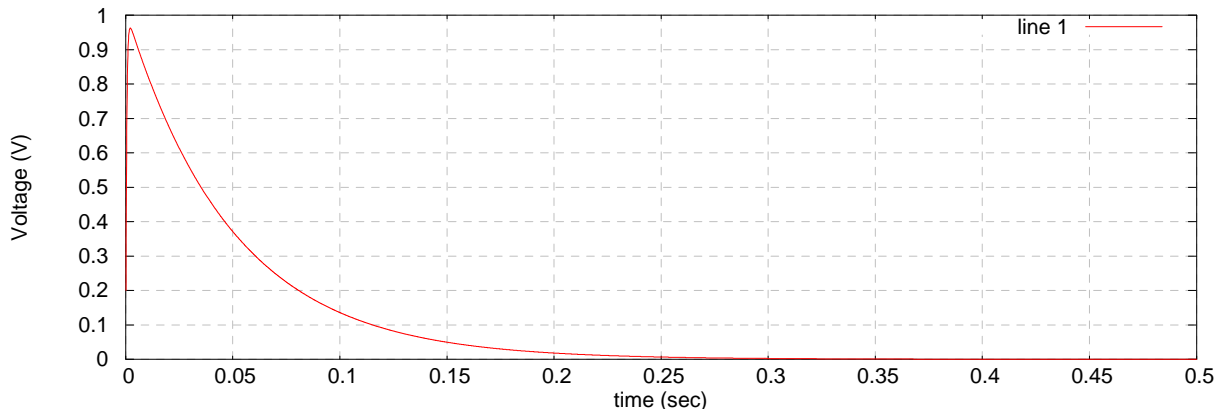
なお、回路素子値は、R1=2、R2=3、L=100[mH]、C=100[μF]、E=1[V]としてシミュレートした。

```

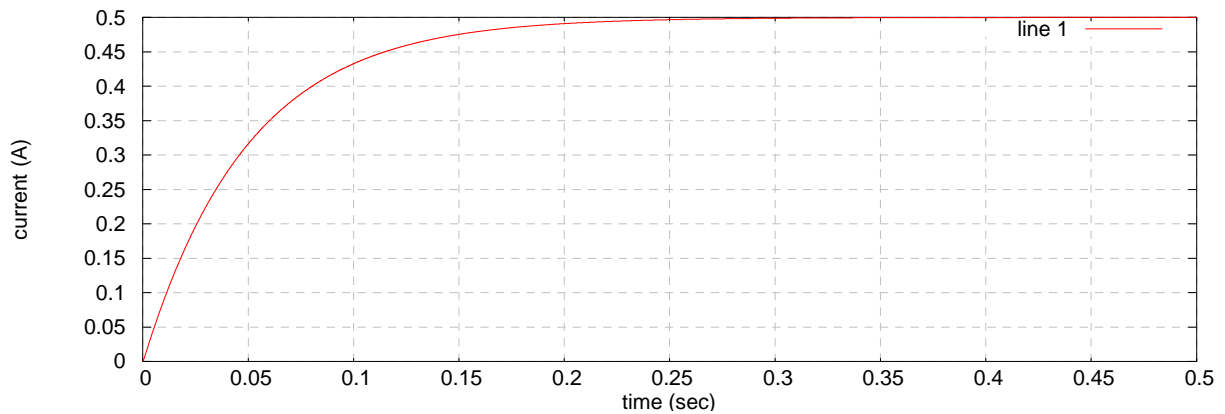
clear;                                x=[0;0];                                end;
R1=2;                                  ft=0.5;                                  xlabel('time (sec)');
R2=3;                                  dt=0.0001;                                ylabel('Voltage (V)');
L=100e-3;                               n=ft/dt;                                  plot(tim,v);
C=100E-6;                               for i=1:n,                                  pause;
E=1;                                     xdot=MI*MAT2*x+MI*VEC1*E;               xlabel('time (sec)');
MAT1=[R1*C L; R2*C -L];                 x=x+xdot*dt;                               ylabel('current (A)');
MAT2=[0 -R1; -1 0];                     v(i)=x(1);                                  plot(tim,cur);
VEC1=[1;0];                               cur(i)=x(2);
MI=inv(MAT1);                             tim(i)=i*dt;

```

シミュレーション結果 (コンデンサの電圧)

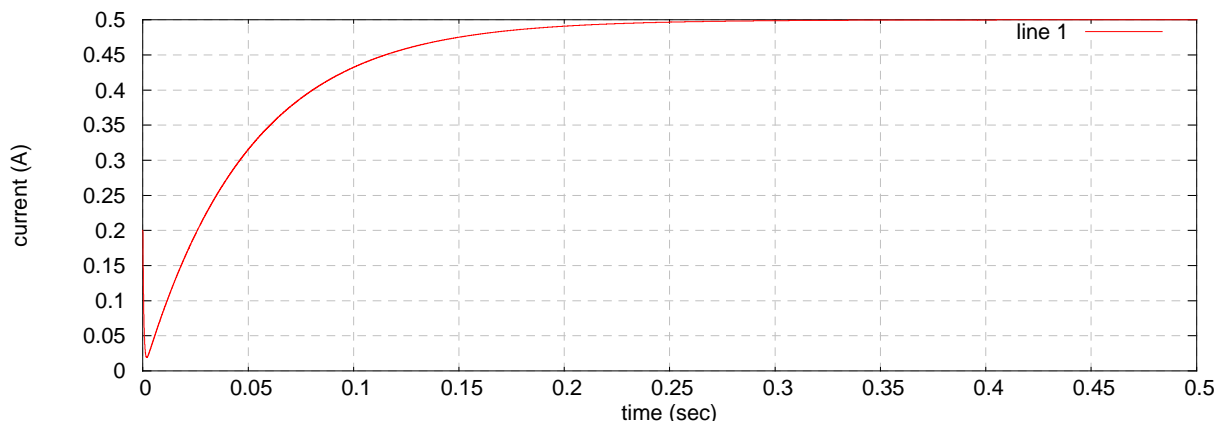


シミュレーション結果 (コイルに流れる電流)



参考 (R1 に流れる電流)

$\left(i(t) + C \frac{dv(t)}{dt}\right)$ が R1 に流れる電流であるから、プログラムに $i1(i) = x(2) + C * xdot(1)$ を挿入すればよい。



7.10 問題10

単振子の運動方程式を求めよ。

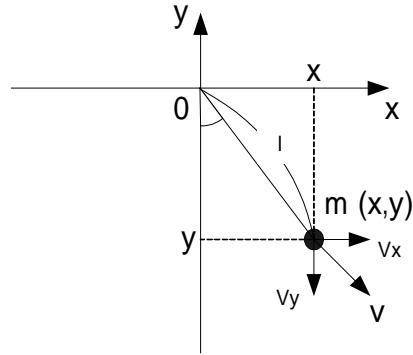


Fig.1

解答

Fig.1 の力学系の運動エネルギー T (質量が移動する時に発生)は

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

物体 $m[kg]$ は座標 $[x, y]$ にあり,

$$x = x(t), y = y(t) \quad (2)$$

と考える.

ここで, 速度 $v[m/s]$ を x 軸方向と y 軸方向に分割すると

x 軸方向の速度は

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (3)$$

となり, y 軸方向の速度は

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (4)$$

となる. 従って, v^2 は次式となる.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (5)$$

ここで, $x(t), y(t)$ を l と $\theta(t)$ を用いて表すと

$$x(t) = l \sin \theta(t) \quad (6)$$

$$y(t) = -l \cos \theta(t) \quad (7)$$

となる.

式(6)(7)を微分すると

$$\frac{dx}{dt} = l\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = l\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \quad (9)$$

となる.

式(8)(9)を式(5)に代入すると

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\theta}^2(t) \quad (10)$$

式(10)を式(1)に代入すると

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(t) \quad (11)$$

となる.

次に Fig.1 の位置エネルギー U は原点を基準にし, 求めると

$$U = mg(-l \cos \theta(t)) \quad (12)$$

となる .

$$L = T - U = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2(t) + mgl \cos \theta(t) \quad (13)$$

ここで , ラグランジュの運動方程式を記述すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \theta} = F \quad (14)$$

また , 問題では摩擦を考慮していない為 , $R = 0$

よって ,

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0 \quad (15)$$

また , 外力は作用していないので

$$F = 0 \quad (16)$$

である .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}(t) \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta(t) \quad (18)$$

式(15) ~ (18)を式(14)に代入すると

$$ml^2 \ddot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) = 0 \quad (19)$$

となる . ($\because \ddot{\theta}(t) = \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$)

式(19)を整理すると

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \quad (20)$$

となる .

(注)式(20)に $\sin \theta(t)$ が存在している為 , 式(20)は非線形微分方程式となる .

シミュレーション用プログラムについては、16頁を参照のこと。

7.11 問題11

Fig.1 のように 2 つの台車がバネとダンパーで結合されている．運動方程式を求めよ．

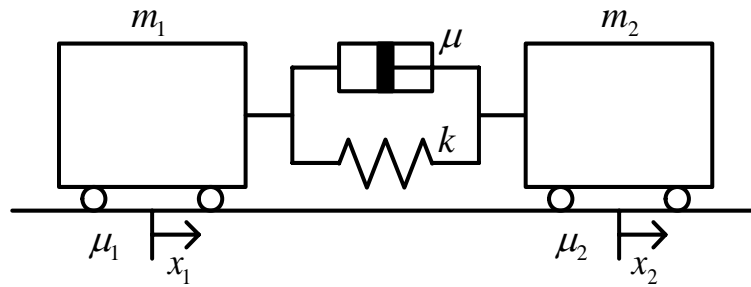


Fig.1

解答

各台車の変位を $x_1(t), x_2(t)$ とする (以下, x_1, x_2 とする)．ここで, m_1 の速度は $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$, m_2 の速度は $\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}$ で表される．運動方程式を求めるために Fig.1 における運動エネルギー T を求める．

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (1)$$

位置エネルギー V は, バネに蓄積される．(変位の差に関係することに注意)

$$V = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 \quad (2)$$

又, 消費エネルギー R は,

$$R = \frac{1}{2} \mu (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{x}_2^2 \quad (3)$$

となる．

ここで, ラグランジュ関数 L は,

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1^2 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 \quad (4)$$

と求まる．

次に, ラグランジュの運動方程式は一般的に

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (5)$$

と表せる．

x_1 に対してラグランジュの運動方程式を求める．

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = 0 \quad (6)$$

(外力 F は存在しないため, 0)

式(6)の各項の計算を行う．

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2) \quad (8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_1 \dot{x}_1 \quad (9)$$

式(6)に式(7), (8), (9)を代入すると

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_1\dot{x}_1 = 0 \quad (10)$$

式(10)をまとめると

$$m_1\ddot{x}_1 + (\mu + \mu_1)\dot{x}_1 - \mu\dot{x}_2 + k(x_1 - x_2) = 0 \quad (11)$$

次に、同様にして x_2 に対してラグランジュの運動方程式を求める。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = 0 \quad (12)$$

(外力 F は存在しないため、0)

式(6)の各項の計算を行う。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2\ddot{x}_2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = k(x_1 - x_2) \quad (14)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = -\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_2\dot{x}_2 \quad (15)$$

式(12)に式(13), (14), (15)を代入すると

$$m_2\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_2\dot{x}_2 = 0 \quad (16)$$

式(10)をまとめると

$$m_2\ddot{x}_2 - \mu\dot{x}_1 + (\mu + \mu_2)\dot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0 \quad (17)$$

従って、Fig.1 における運動方程式は式(11), (17)となる。

式(11)(17)を 7.9 節と同様に行列とベクトルを用いて表現すると

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu + \mu_1 & -\mu \\ -\mu & \mu + \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。

ここで、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mu + \mu_1 & -\mu \\ -\mu & \mu + \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

を用いて、微分方程式を表現すると次式を得る。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

よって、

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x})$$

となる。

ここで、下記の変数変換を施す。

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{新しい変数 } \mathbf{z} \text{ を用いると} \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

と表される。

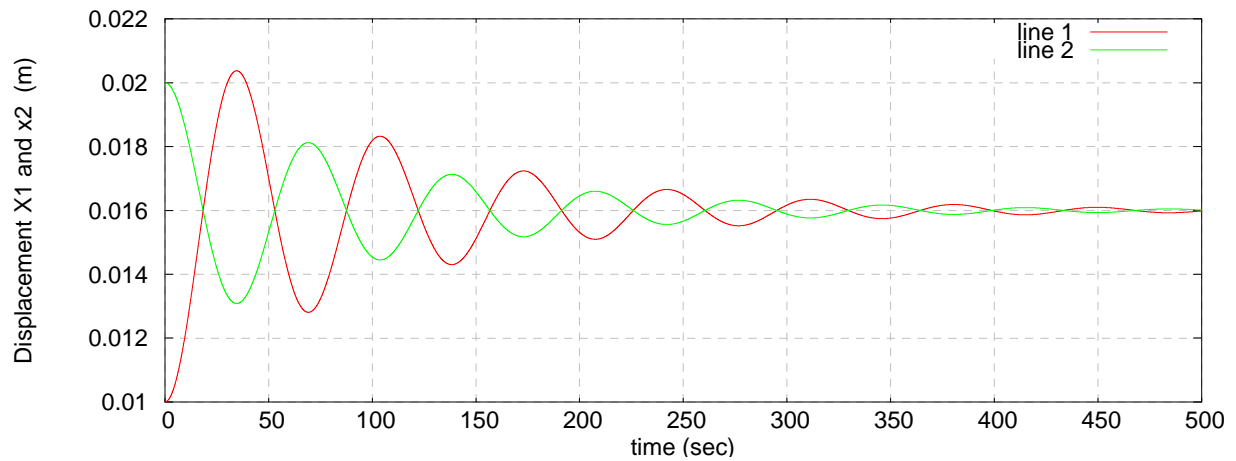
なお、物理定数値は、 $m_1=2$ 、 $m_2=3$ 、 $k=0.01$ 、 $\mu_1=0.02$ 、 $\mu_2=0.03$ 、 $\mu=0.01$ とする。

プログラム

```
clear;
m1=2;
m2=3;
k=0.01;
mu1=0.02;
mu2=0.03;
mu=0.01;
M=[m1 0;0 m2];
D=[mu+mu1 -mu;-mu mu+mu2];
K=[k -k;-k k];
MI=inv(M);
A11=[0 0;0 0];
A12=[1 0;0 1];
A=[A11 A12;-MI*K -MI*D];

z=[0.01;0.02;0;0];
ft=500;
dt=0.01;
n=ft/dt;
for i=1:n,
    zdot=A*z;
    z=z+zdot*dt;
    x1(i)=z(1);
    x2(i)=z(2);
    tim(i)=i*dt;
end;
xlabel('time (sec)');
ylabel('Displacement X1 and x2 (m)');
plot(tim,x1,tim,x2);
```

シミュレーション結果



7.12 問題12

Fig.1 に示すようなねじれを生じるシャフトで2つの慣性が結合されている。片側のシャフトには外部からのトルクが与えられているとする。この系の運動方程式を求めよ。

ただし、 θ_1, θ_2 : 角度、 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$: 角速度、 J_m, J_L : 慣性モーメント、 μ_1, μ_2 : 粘性摩擦、 k : パネ定数、 τ : トルクとする。

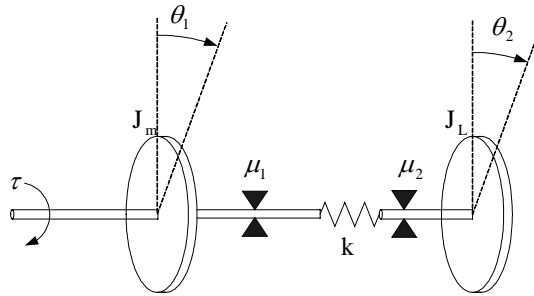


Fig.1

解答

この系の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_L \dot{\theta}_2^2 \quad (1)$$

位置エネルギー V は

$$V = \frac{1}{2} k (\theta_1 - \theta_2)^2 \quad (2)$$

また、消費エネルギー R は

$$R = \frac{1}{2} \mu_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (3)$$

となる。式(1)、式(2)よりラグランジアン関数 L を求めると、

$$L = T - V = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_L \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} k (\theta_1 - \theta_2)^2 \quad (4)$$

となる。式(3)、式(4)よりラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (5)$$

を求める。ただし、 q_i は一般化座標、 \dot{q}_i は一般化速度である。

() θ_1 について

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = J_m \dot{\theta}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -k\theta_1 + k\theta_2, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1} = \mu_1 \dot{\theta}_1, \quad F_1 = \tau \quad (6)$$

式(6)を式(5)に代入すると、

$$J_m \ddot{\theta}_1 + k\theta_1 - k\theta_2 + \mu_1 \dot{\theta}_1 = \tau \quad (7)$$

() θ_2 について

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = J_L \dot{\theta}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = k\theta_1 - k\theta_2, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2} = \mu_2 \dot{\theta}_2, \quad F_2 = 0 \quad (8)$$

式(8)を式(5)に代入すると、

$$J_L \ddot{\theta}_2 - k\theta_1 + k\theta_2 + \mu_2 \dot{\theta}_2 = 0 \quad (9)$$

式(7)、式(9)をまとめると次式を得る。

$$J_m \ddot{\theta}_1 + \mu_1 \dot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = \tau \quad (10)$$

$$J_L \ddot{\theta}_2 + \mu_2 \dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (11)$$

ただし、 $J_1 = 0.8$ 、 $J_2 = 1.0$ 、 $\mu_1 = 0.01$ 、 $\mu_2 = 0.02$ 、 $k = 0.05$ とする。

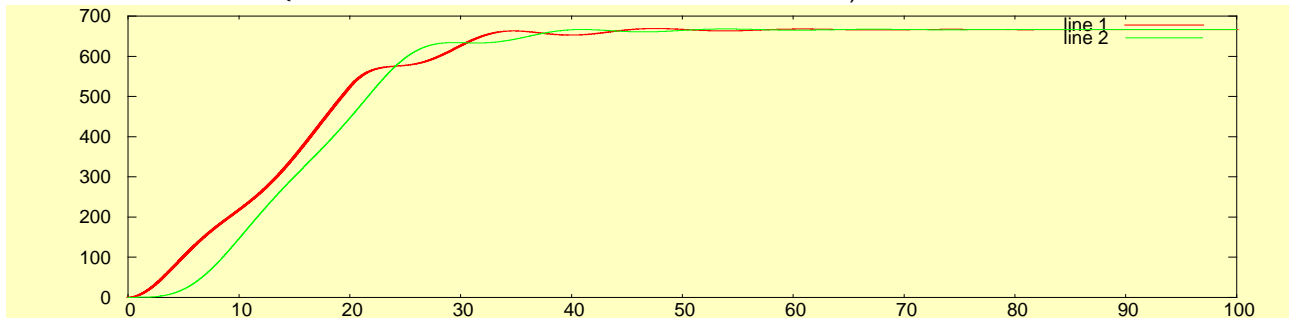
新しい変数として、 $x_1 = \theta_1$ 、 $x_2 = \dot{\theta}_1$ 、 $x_3 = \theta_2$ 、 $x_4 = \dot{\theta}_2$ とおくと、下記の連立微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= [\tau - k(x_1 - x_3) - \mu_1 x_2] / J_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} &= [-k(x_3 - x_1) - \mu_2 x_4] / J_2 \end{aligned}$$

プログラム

```
clear;
J1=0.08;
J2=0.1;
mu1=0.01;
mu2=0.02;
k=0.01;
x1=0;
x2=0;
x3=0;
x4=0;
tau=1.0;
ft=100.0;
dt=0.001;
n=ft/dt;
for i=1:n,
    x1dot=x2;
    x2dot=(tau-k*(x1-x3)-mu1*x2)/J1;
    x3dot=x4;
    x4dot=(-k*(x1-x3)-mu2*x4)/J2;
    x1=x1+x1dot*dt;
    x2=x2+x2dot*dt;
    x3=x3+x3dot*dt;
    x4=x4+x4dot*dt;
    tim(i)=i*dt;
    y1(i)=x1;
    y2(i)=x3;
    if I*dt>20
        tau=0;
    end;
end;
plot(tim,y1,tim,y2);
```

シミュレーション結果（20 秒間、1 Nm のトルクを与えた場合の応答）



。

7.13 問題13

Fig.1 に示す力学系の数式モデルを求めよ。各台車の質量を m_0, m_1, m_2 、台車とレール間の粘性摩擦係数を μ_0, μ_1, μ_2 、各台車の変位を x_0, x_1, x_2 とする。また、各台車間は、バネとダンパーで結合されており、バネ定数を k_1, k_2 、粘性摩擦係数を D_1, D_2 とする。

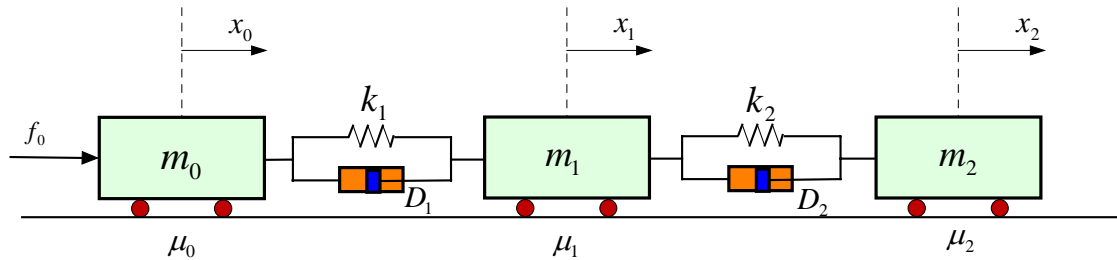


Fig.1

解答

Fig.1 の力学系の運動、位置エネルギー、エネルギー散逸関数を求めると次式となる。

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(x_0 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 \quad (2)$$

$$R = \frac{1}{2}D_1(\dot{x}_0 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}D_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}\mu_0\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}\mu_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2\dot{x}_2^2 \quad (3)$$

これらをラグランジュの運動方程式に代入すると次の運動方程式を得ることができる。

$$m_0\ddot{x}_0 + k_1(x_0 - x_1) + D_1(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + \mu_0\dot{x}_0 = 0 \quad (4)$$

$$m_1\ddot{x}_1 - k_1(x_0 - x_1) + k_2(x_1 - x_2) - D_1(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + D_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_1\dot{x}_1 = 0 \quad (5)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_1 - x_2) - D_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu_2\dot{x}_2 = 0 \quad (6)$$

行列表現にすると

$$\begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + \mu_0 & -D_1 & 0 \\ -D_1 & D_1 + D_2 + \mu_1 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & D_2 + \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。

ここで、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 + \mu_0 & -D_1 & 0 \\ -D_1 & D_1 + D_2 + \mu_1 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & D_2 + \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

を定義すると、運動方程式は次式のように表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (9)$$

よって、1式(9)から

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\mathbf{x}) \quad (10)$$

ここで、下記の変数変換を施す。

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \text{新しい変数 } z \text{ を用いると}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M^{-1}f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表される。

なお、物理定数値は、

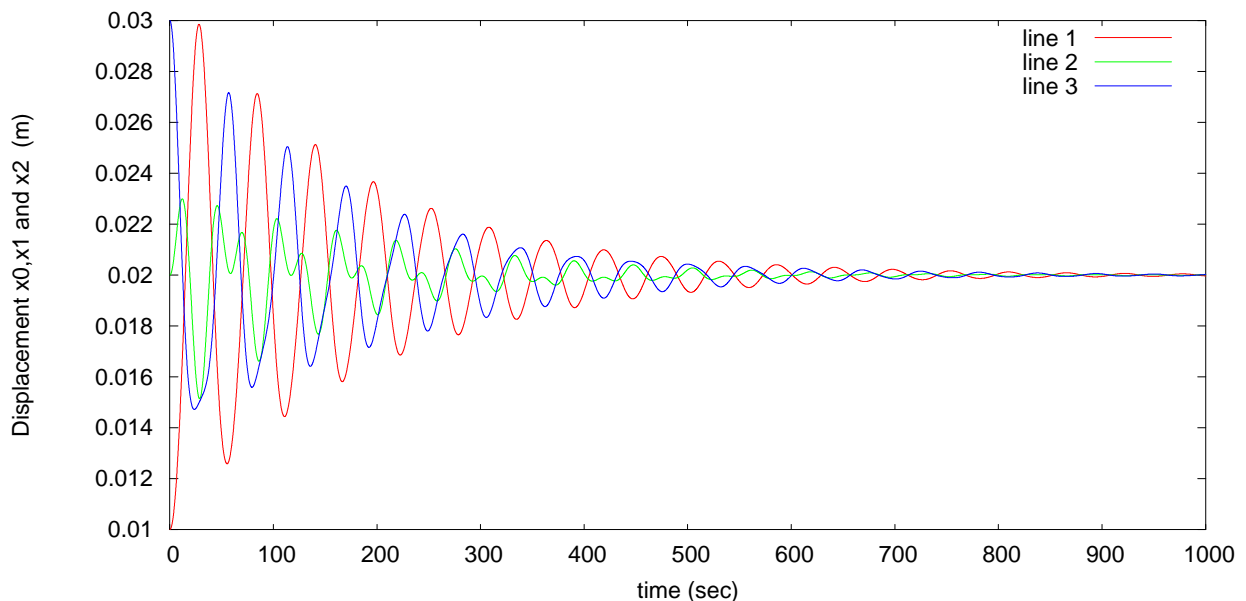
$m_0=100$ 、 $m_1=100$ 、 $m_2=100$ 、 $k_1=1$ 、 $k_2=2$ 、 $D_1=0.2$ 、 $D_2=0.3$ 、 $\mu_0=1$ 、 $\mu_1=1$ 、 $\mu_2=1$ とする。

プログラム

```
clear;
m0=100;
m1=100;
m2=100;
k1=1;
k2=2;
D1=0.2;
D2=0.3;
mu0=1;
mu1=1;
mu2=1;
f0=0;
M=[m0 0 0;0 m1 0;0 0 m2];
D=[D1+mu0 -D1 0;
  -D1 D1+D2+mu1 -D2;
  0 -D2 D2+mu2];
K=[k1 -k1 0;-k1 k1+k2 -k2;0 -k2 k2];
f=[f0;0;0];
MI=inv(M);

A11=[0 0 0;0 0 0;0 0 0];
A12=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
A=[A11 A12;-MI*K -MI*D];
z=[0.01;0.02;0.03;0;0;0];
ft=1000;
dt=0.1;
n=ft/dt;
for i=1:n,
  zdot=A*z;
  z=z+zdot*dt;
  x0(i)=z(1);
  x1(i)=z(2);
  x2(i)=z(3);
  tim(i)=i*dt;
end;
xlabel('time (sec)');
ylabel('Displacement x0,x1 and x2 (m)');
plot(tim,x0,tim,x1,tim,x2);
```

シミュレーション結果（外力は0とした）



7.14 問題14

Fig. 1 に示す二重振子の数式モデルを求めよ。質量を m_1, m_2 [kg]、ロープ長を l_1, l_2 [m]、角度を θ_1, θ_2 [rad] とする。また、重力の加速度を g [m/s²] とする。

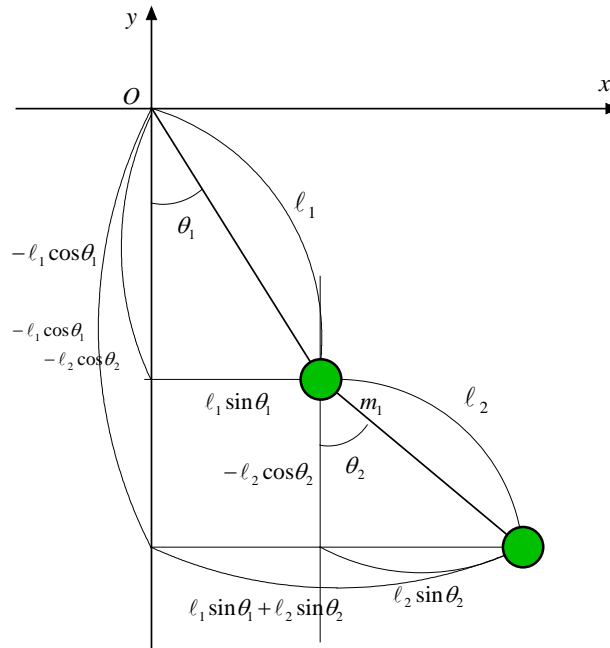


Fig. 1

解答

m_1 の座標 (x_1, y_1)

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (1)$$

m_2 の座標 (x_2, y_2)

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (2)$$

式(1)、(2)の時間での微分

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (4)$$

よって m_1 の運動エネルギー T_1 は、

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (5)$$

となる。

また m_2 の運動エネルギー T_2 は、

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 \left\{ (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

(参考)

$$\begin{aligned}e^{j(\theta_1 - \theta_2)} &= \cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2) \\e^{j\theta_1} \cdot e^{-j\theta_2} &= (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - j \sin \theta_2) \\&= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1)\end{aligned}$$

とより

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1 - \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1\end{aligned}$$

式(5)と式(6)よりシステム的全運動エネルギー T は

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (7)$$

となる。

また、システム的全位置エネルギー U は

$$U = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (8)$$

となる。

よってラグランジュ関数 $L = T - U$ は次式のようにになる。

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + \frac{\partial R}{\partial \theta_1} = F_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + \frac{\partial R}{\partial \theta_2} = F_2 \end{cases} \quad (10)$$

式(10)を求めるのであるが、 $F_1 = 0, F_2 = 0$ (外力なし)でかつ $R = 0$ (摩擦なし)とする。

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \\ \frac{\partial R}{\partial \theta_1} = 0 \quad F_1 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ \frac{\partial R}{\partial \theta_2} = 0 \quad F_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

式(11)、(12)を式(10)に代入すると

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (13)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (14)$$

となる。

すなわち、Fig.1 の二重振子は式(13)と式(14)の連立微分方程式で表現されることがわかる。

式(13)、(14)を行列表現すると、次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \\ m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

なる変数変換を施すと、下記の連立微分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_4 \\ \begin{bmatrix} \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)\ell_1^2 & m_2\ell_1\ell_2 \cos(x_1 - x_2) \\ m_2\ell_1\ell_2 \cos(x_1 - x_2) & m_2\ell_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} m_2\ell_1\ell_2 x_4^2 \sin(x_1 - x_2) \\ -m_2\ell_1\ell_2 x_3^2 \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)g\ell_1 \sin x_1 \\ m_2g\ell_2 \sin x_2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

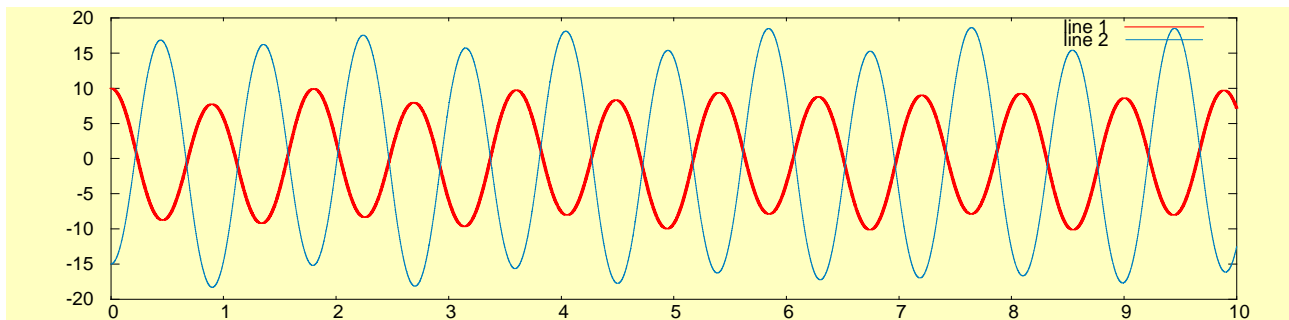
(この方程式は、非線形微分方程式であるので解析解を求めることはできない。)

プログラム

```
clear;
pi=3.1415926;
dt=0.0001;
ft=10.0;
n=ft/dt;
g=9.8;
m1=1;
m2=0.8;
L1=0.6;
L2=0.5;
a11=(m1+m2)*L1*L1;
a22=m2*L2*L2;
k=m2*L1*L2;
x=[10*pi/180.0;-15*pi/180.0;0;0];

for i=1:n,
    x12=x(1)-x(2);
    J=[a11 k*cos(x12);k*cos(x12) a22];
    NN=[k*x(4)*x(4)*sin(x12);-k*x(3)*x(3)*sin(x12)];
    GG=[(m1+m2)*g*L1*sin(x(1));m2*g*L2*sin(x(2))];
    xb=-inv(J)*(NN+GG);
    xdot=[x(3);x(4);xb(1);xb(2)];
    x=x+xdot*dt;
    th1(i)=x(1)*180/pi;
    th2(i)=x(2)*180/pi;
    tim(i)=i*dt;
end;
plot(tim,th1,tim,th2);
```

シミュレーション結果 ($m_1 = 1, m_2 = 0.8, \ell_1 = 0.6, \ell_2 = 0.5$ の場合)



7.15 問題15

Fig. 1 に示す機械系の数式モデルを求めよ。半径 R [m]、慣性モーメント J の円板が外部トルク τ [N・m] で駆動されている。図に示すようなリンク機構で回転運動が並進運動に変換されている。図に示す諸量を用いて全体の運動方程式を求めよ。

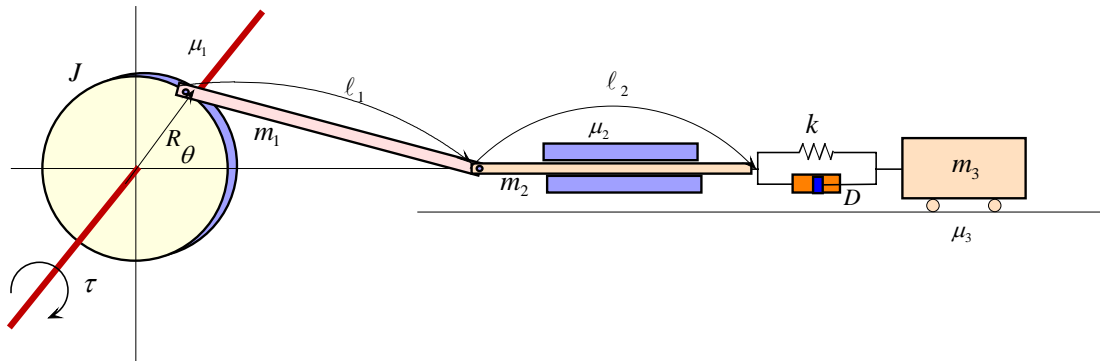
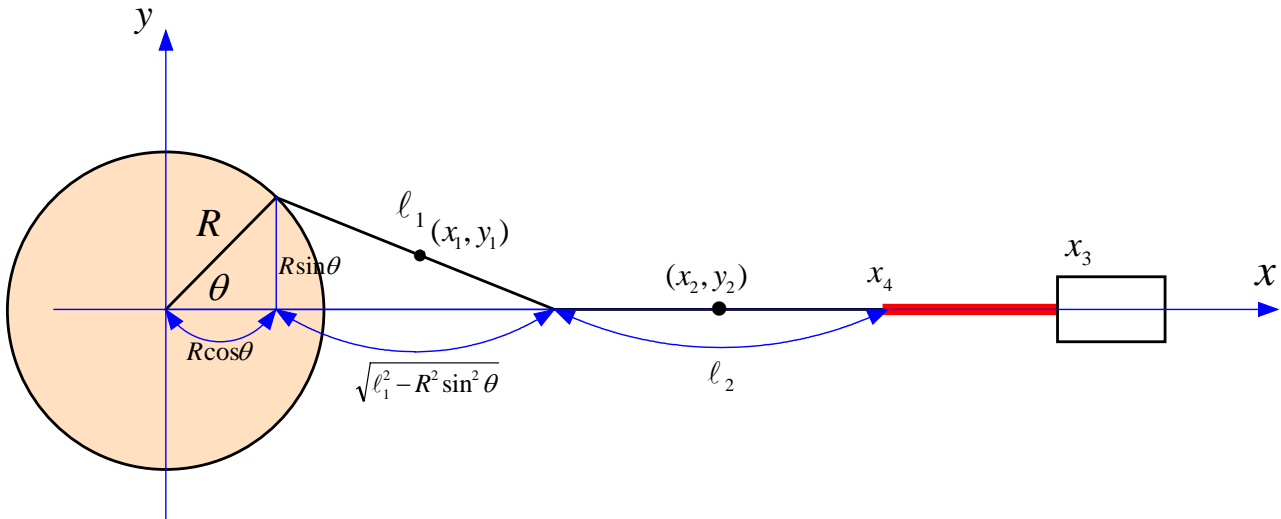


Fig. 1

解答

Fig.1 の円盤の回転軸を x y 座標系の原点と考える。



リンク1の重心位置

$$x_1 = R \cos \theta + \frac{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}}{2} \quad (1)$$

$$y_1 = \frac{1}{2} R \sin \theta \quad (2)$$

リンク2の重心位置 (x 軸の並進運動のみ)

$$x_2 = R \cos \theta + \sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \ell_2 \quad (3)$$

カートの位置

$$x_3 \quad (4)$$

リンク1の重心周りの慣性モーメントは(リンク1には回転運動が伴うので運動エネルギー算出の際必要)、

$$J_1 = \frac{1}{12} m_1 \ell_1^2 \quad (5)$$

となる。

【運動エネルギー】

円盤の運動エネルギー

$$T_d = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (6)$$

リンク 1 の運動エネルギー

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (7)$$

ここに、 θ_1 は、リンク 1 の x 軸に対する角度。

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \pi - \cos^{-1} \left(\frac{R \sin \theta}{\ell_1} \right) \quad (8)$$

式(7)の \dot{x}_1, \dot{y}_1 は、式(1)(2)の時間微分から

$$\frac{dx_1}{dt} = -R \dot{\theta} \sin \theta - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (9)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2} R \dot{\theta} \cos \theta \quad (10)$$

となる。

また、 $\dot{\theta}_1$ は、式(8)の時間微分から

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\cos^{-1} \left[\frac{R \sin \theta}{\ell_1} \right] \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R \sin \theta}{\ell_1} \right)^2}} \frac{R}{\ell_1} \dot{\theta} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \dot{\theta} \cos \theta \quad (11)$$

よって、式(7)の速度、角速度の 2 乗は、

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 &= R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R^3 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \cos \theta \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^4 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \quad (13)$$

となる。

よって、リンク 1 の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\theta}^2 \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} J_1 R^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

リンク 2 の運動エネルギー

式(3)の時間微分から

$$\dot{x}_2 = -R \dot{\theta} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (15)$$

であるから

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \left[-R \dot{\theta} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right]^2 \quad (16)$$

となる。

カートの運動エネルギー

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \quad (17)$$

システム的全運動エネルギー

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 + T_3 = & \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\theta}^2 \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right] \\ & + \frac{1}{2} J_1 R^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \right] + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \left[-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta \right]^2 \\ & + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \end{aligned} \quad (18)$$

参考：式(18)で、 $\dot{\theta}^2$ を含む項のみをまとめると

$$\begin{aligned} T_\theta = & \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\theta}^2 \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right] \\ & + \frac{1}{2} J_1 R^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \right] + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \left[-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta \right]^2 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。これより、等価慣性モーメントを算出でき、下記のようなになる。

$$\begin{aligned} J_\theta = & m_1 R^2 \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right] \\ & + J_1 R^2 \left[\frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \right] + m_2 R^2 \sin^2 \theta \left[-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta \right]^2 \end{aligned} \quad (20)$$

位置エネルギー

バネの左端の座標は

$$x_4 = R \cos \theta + \sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} + \ell_2 \quad (21)$$

であるから

$$U = \frac{1}{2} k (x_3 - x_4)^2 = \frac{1}{2} k (x_3 - R \cos \theta - \sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} - \ell_2)^2 \quad (22)$$

となる。

エネルギー散逸関数

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2} \mu_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} D \dot{x}_3^2 \\ = & \frac{1}{2} \mu_1 \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \mu_2 R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2} D \dot{x}_3^2 \end{aligned} \quad (23)$$

ラグランジュ関数

$L = T - U$

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\theta}^2 \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right] \\ & + \frac{1}{2} J_1 R^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \right] + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \left[-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta \right]^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}k(x_3 - R \cos \theta - \sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} - \ell_2)^2 \quad (24)$$

偏微分などの計算

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_1 R^2 \dot{\theta} \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + J_1 R^2 \dot{\theta} \left[\frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \right] + m_2 R^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta \left[-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta \right]^2 \\ &= m_1 R^2 \dot{\theta} \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + J_1 R^2 \dot{\theta} \left[\frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + m_2 R^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta \left[1 + 2 \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta + \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \quad (26)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = \mu_1 \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta + \mu_2 R^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta \right)^2 \quad (27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_3 \dot{x}_3 \quad (28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -k(x_3 - R \cos \theta - \sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} - \ell_2) \quad (29)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_3} = D \dot{x}_3$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_1 R^2 \ddot{\theta} \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + m_1 R^2 \dot{\theta} \frac{d}{dt} \left[\sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + J_1 R^2 \ddot{\theta} \left[\frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + J_1 R^2 \dot{\theta} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + m_2 R^2 \ddot{\theta} \sin^2 \theta \left[1 + 2 \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta + \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + m_2 R^2 \dot{\theta} \frac{d}{dt} \sin^2 \theta \left[1 + 2 \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta}} R \cos \theta + \frac{1}{\ell_1^2 - R^2 \sin^2 \theta} R^2 \cos^2 \theta \right] \end{aligned}$$

7.16 問題16

Fig. 1 に示すバネ要素で構成された単振子の数式モデルを求めよ。質量を m [kg]、バネ定数を k 、角度を θ [rad] とする。また、重力の加速度を g [m/s²] とする。

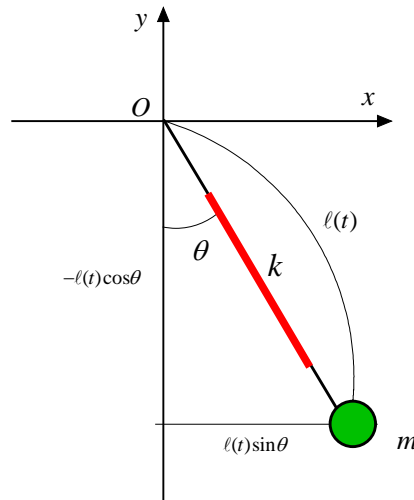


Fig. 1

解答

バネの自然長を ℓ_0 とすると、バネの長さは

$$\ell(t) = \ell_0 + \ell_1(t) \quad (1)$$

で表される。 $\ell_1(t)$ は、バネの伸びを表す。

バネ方向の力は、 $mg \cos \theta$ であるから、次式が成立つ。

$$k\ell_1(t) = mg \cos \theta \quad (2)$$

式(2)よりバネの伸び量が決定される。

$$\ell_1(t) = \frac{1}{k} mg \cos \theta \quad (3)$$

したがって、質量 m の座標は、

$$x = \ell(t) \sin \theta = \left(\ell_0 + \frac{mg}{k} \cos \theta \right) \sin \theta \quad (4)$$

$$y = -\ell(t) \cos \theta = -\left(\ell_0 + \frac{mg}{k} \cos \theta \right) \cos \theta \quad (5)$$

となる。

運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (6)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\ell_0 + \frac{mg}{k} \cos \theta \right) \sin \theta = -\frac{mg}{k} \dot{\theta} \sin^2 \theta + \frac{mg}{k} \dot{\theta} \cos^2 \theta + \ell_0 \dot{\theta} \cos \theta \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\ell_0 + \frac{mg}{k} \cos \theta \right) \cos \theta = \frac{2mg}{k} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + \ell_0 \dot{\theta} \sin \theta \quad (8)$$

式(7)、(8)を式(6)に代入すると

$$T = \left[\left(\frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{2mg}{k} \ell_0 \cos \theta + \ell_0^2 \right] \dot{\theta}^2 \quad (9)$$

となる。

位置エネルギー

$$U = -mg\ell(t)\cos\theta + \frac{1}{2}k\ell_1^2(t) = -mg\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\cos\theta\right)\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[\frac{1}{k}mg\cos\theta\right]^2 = -mg\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k}\cos\theta\right)\cos\theta \quad (10)$$

摩擦、外力
無視する。

ラグランジュ関数

$$L = T - U = \left[\left(\frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{2mg}{k}\ell_0\cos\theta + \ell_0^2 \right] \dot{\theta}^2 + mg\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k}\cos\theta\right)\cos\theta \quad (11)$$

偏微分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2\left[\left(\frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{2mg}{k}\ell_0\cos\theta + \ell_0^2 \right] \dot{\theta} \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left(\frac{2mg}{k}\ell_0\sin\theta \right) \dot{\theta}^2 - \frac{(mg)^2}{k}\sin\theta\cos\theta - mg\ell_0\sin\theta \quad (13)$$

運動方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -\left[\frac{4mg}{k}\ell_0\sin\theta \right] \dot{\theta}^2 + 2\left[\left(\frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{2mg}{k}\ell_0\cos\theta + \ell_0^2 \right] \ddot{\theta} \quad (14)$$

よって、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = f \quad (15)$$

に、式(13)、(14)を代入すると、運動方程式が次式となる。

$$2\left[\left(\frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{2mg}{k}\ell_0\cos\theta + \ell_0^2 \right] \ddot{\theta} - \left(\frac{2mg}{k}\ell_0\sin\theta \right) \dot{\theta}^2 + \frac{(mg)^2}{k}\sin\theta\cos\theta + mg\ell_0\sin\theta = 0 \quad (16)$$

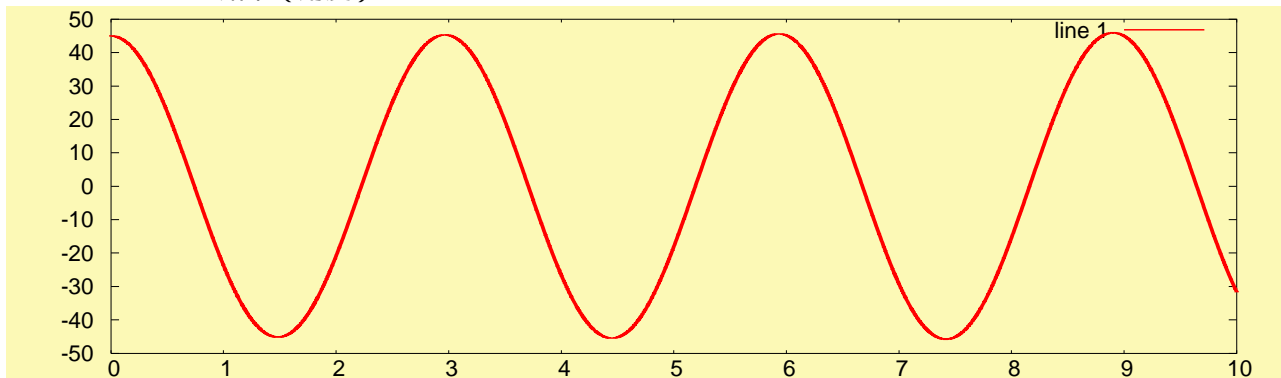
プログラム

```
clear;
pi=3.1415926;
dt=0.001;
ft=10.0;
n=ft/dt;
g=9.8;
k=1000;
m=1;
L0=1;
mg=m*g;
x=[45*pi/180.0;0];
xdot=[0;0];
for i=1:n,
    a=2*(mg*mg/k/k+2*mg*L0/k*cos(x(1))+L0*L0);
    b=-((2*mg*L0/k*sin(x(1)))*x(2)*x(2));
    c=mg*mg/k*sin(x(1))*cos(x(1))+mg*L0*sin(x(1));
    xdot(1)=x(2);
    xdot(2)=-(b+c)/a;
    x=x+xdot*dt;
    th(i)=x(1)*180/pi;
    thdot(i)=x(2)*180/pi;
    tim(i)=i*dt;
    xc(i)=(L0+mg/k*cos(x(1)))*sin(x(1));
    yc(i)=-(L0+mg/k*cos(x(1)))*cos(x(1));
    deltaL(i)=sqrt(xc(i)^2+yc(i)^2)-L0;
end;
plot(tim,th);
pause;
plot(xc,yc);
pause;
plot(tim,deltaL);
```

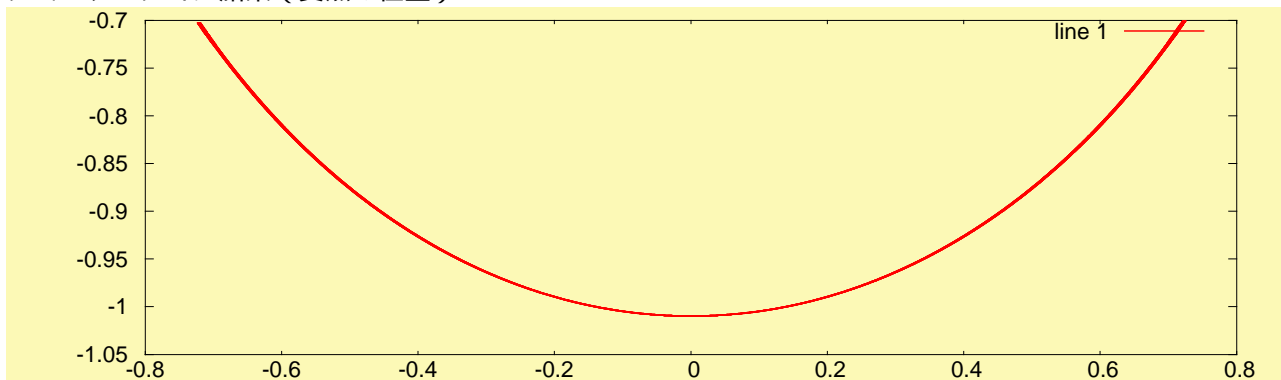
シミュレーション条件

$k=1000$ 、 $m=1$ 、 $L_0=1$ 、 $x=[45 \cdot \pi/180; 0; 0]$;

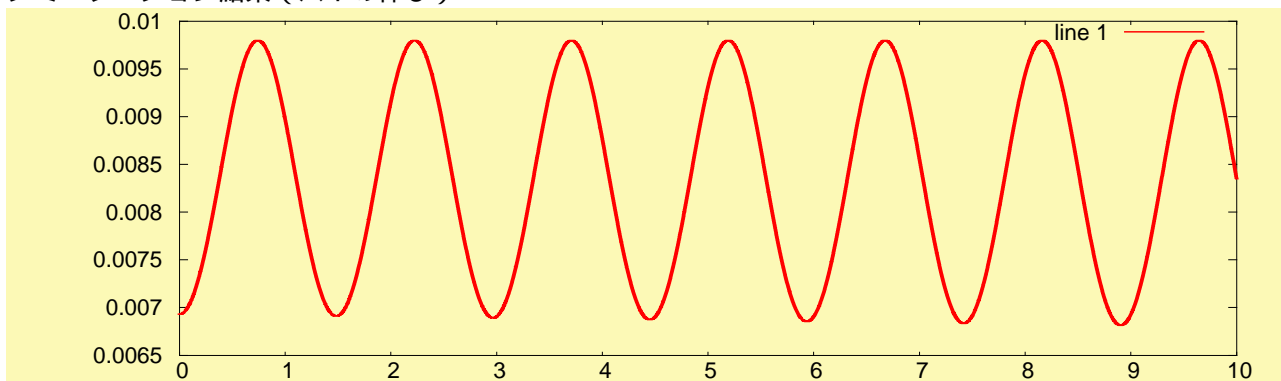
シミュレーション結果 (角度)



シミュレーション結果 (質点の位置)



シミュレーション結果 (バネの伸び)



8 . 微分方程式の数値解法

理工学における現象の多くは微分方程式で記述できる．微分方程式の解は解析的に求められる場合もあるが，非線形微分方程式まで含めて考えた場合，一般には解析解として求めることは困難である．このような場合，微分方程式の解を数値的に求める必要がある．微分方程式は独立変数の数により常微分方程式と偏微分方程式に分類されるが，本文では独立変数が一つの場合，いわゆる常微分方程式の数値解法の基本事項について例題を示しながら説明する．

8 . 1 微分方程式の数値解法

微分方程式の数値解法には種々の方法があるが，ここでは初歩的なオイラー法と実用的なルンゲ・クッタ法の二つの方法について説明する。

8.1.1 オイラー法

次の一階常微分方程式の数値解をオイラー法 (Euler) で求めることを考える。

$$\frac{dy(t)}{dt} = f[y(t), t] \quad (8.1)$$

式(8.1)の解が、図8.1に示すようなものであった仮定する。

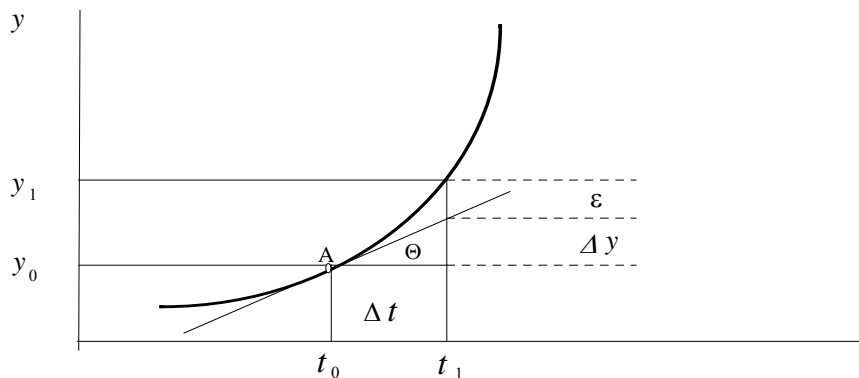


図8.1 オイラー法

点A ($t = t_0, y(t_0) = y_0$) での接線の傾き ($\tan \theta$) は、

$$\tan \theta = f[y(t_0), t_0] \quad (8.2)$$

で求められる。したがって、 Δt だけ時間が経過した時点での $y(t)$ の値 $y(t_1)$ は、次式のように表される。

$$y(t_1) = y(t_0) + \Delta y + \varepsilon \quad (8.3)$$

Δy は、

$$\Delta y = \tan \theta \cdot \Delta t = f[y(t_0), t_0] \cdot \Delta t \quad (8.4)$$

となる。

よって、

$$y(t_1) = y(t_0) + f[y(t_0), t_0] \cdot \Delta t + \varepsilon \quad (8.5)$$

式(8.5)において、 ε を微小にできるならば次のような近似式が成立する。

$$y(t_1) = y(t_0) + f[y(t_0), t_0] \cdot \Delta t \quad (8.6)$$

式(8.6)を一般的な表現に書き換えると次式ようになる。

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f[y(t_k), t_k] \cdot \Delta t \quad (8.7)$$

8.1.2 ルンゲクッタ法のアルゴリズム

関数 $y(x+h)$ は、すでに述べたように x のまわりでテイラー級数に展開することができる。

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2!}y''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}y^{(n)}(x)h^n + \cdots \quad (8.8)$$

先に述べたオイラー法は、 h に関する一次項までを考慮した方法であったが、ルンゲクッタ法は、式(8.8)の級数展開において h の高次項まで考慮した方法である。例えば $n=2$ の場合は 2 次のルンゲクッタ法、 $n=4$ の場合は 4 次のルンゲクッタ法と呼ばれる。

ここで、2 次のルンゲクッタ法の計算手順を導出してみよう。2 次のルンゲクッタの計算は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + ch, y_i + dk_1) \\ y_{i+1} &= y_i + ak_1 + bk_2 \end{aligned} \quad (8.9)$$

式(8.9)において a, b, c, d は係数である。ここで、これら係数の満足すべき条件を求めてみよう。

式(8.8)において、 $x = x_i, x_i + h = x_{i+1}$ と置いて、 h に関する 1 次以上の項を $g(x_i, y_i, h)h$ として次式とする。

$$g(x_i, y_i, h)h = y'(x_i)h + \frac{1}{2!}y''(x_i)h^2 + \cdots \quad (8.10)$$

式(8.10)を用いて $y(x_{i+1})$ を表すと、

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + g(x_i, y_i, h)h \quad (8.11)$$

ところで、 $g(x_i, y_i, h)$ は

$$g(x_i, y_i, h) = y'(x_i) + \frac{1}{2!}y''(x_i)h + \cdots \quad (8.12)$$

である。式(8.12)の $y''(x_i)$ は

$$y''(x_i) = f''(x_i, y_i) = f_{xx}(x_i, y_i) + f_{yy}(x_i, y_i)f(x_i, y_i) \quad (8.13)$$

と書ける。従って、式(8.13)を式(8.12)に代入すると

$$g(x_i, y_i, h) = f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}\{f_{xx}(x_i, y_i) + f_{yy}(x_i, y_i)f(x_i, y_i)\}h + \cdots \quad (8.14)$$

となる。式(8.14)を式(8.11)に代入すると

$$y_{i+1} = f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2}f_{xx}(x_i, y_i)h^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(x_i, y_i)f(x_i, y_i)h^2 + \cdots \quad (8.15)$$

となる。

一方、2 次のルンゲクッタ法の式(8.9)より

$$y_{i+1} = y_i + af(x_i, y_i)h + bf\{x_i + ch, y_i + df(x_i, y_i)h\}h \quad (8.16)$$

が得られる。式(8.16)の $f\{x_i + ch, y_i + df(x_i, y_i)h\}$ に 2 変数テイラー展開を施すと

$$\begin{aligned} f\{x_i + ch, y_i + df(x_i, y_i)h\} &= f(x_i, y_i) + chf_x(x_i, y_i) \\ &\quad + dhf_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i) + \cdots \end{aligned} \quad (8.17)$$

となる。式(8.17)を式(8.16)に代入すると

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + (a+b)f(x_i, y_i)h + bcf_x(x_i, y_i)h^2 \\ &\quad + bdf_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)h^2 + \cdots \end{aligned} \quad (8.18)$$

となる。

従って、式(8.15)と式(8.18)の h の 2 乗の項まで等しくなれば、式(8.9)は式(8.8)の h に関する 2 次項までを実現したことになる。このためには、

$$a+b=1, bc=\frac{1}{2}, bd=\frac{1}{2} \quad (8.19)$$

が成立すればよい。式(8.19)より, a, c, d を求めると

$$a = 1 - b, c = \frac{1}{2b}, d = \frac{1}{2b} \quad (8.20)$$

となる。よって式(8.9)は

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2b}, y_i + \frac{k_1}{2b}\right) \\ y_{i+1} &= y_i + (1-b)k_1 + bk_2 \end{aligned} \quad (8.21)$$

となる。 b は任意に選べる定数であるが, 特に式(8.21)で $b = 1$ の場合を变形オイラー・コーシー法, $b = \frac{1}{2}$

の場合をホイン(Henn)の方法とも呼んでいる。

一方, $n = 4$ の場合 (4次のルンゲクッタ法) についても同様の計算を行うことによって導出できるが, 繁雑となるので計算手順のみを示す。

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (8.22)$$

以上, 2次及び4次のルンゲクッタ法の説明を行ったが, 次数 n は2または4に固定されたものではなく, その他の次数に対しても計算手順を求めることができる。重要なことは式(8.8)の高階導関数をいかにして計算するかということになる。

8.1.3 1階連立常微分方程式のルンゲクッタ法

前節では, 1階常微分方程式の解法について述べた。本節では, より高階の常微分方程式の数値解析法を取り扱う。一例として, 式(8.23)で表わされる2階常微分方程式を考えてみよう。

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a \frac{dy(x)}{dx} + by(x) = cg(x) \quad (8.23)$$

式(8.23)を, 新しい変数 $y_1(x) = y(x), y_2(x) = dy(x)/dx$ を用いて表わすと, 次式のように1階2元連立常微分方程式として表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1(x)}{dx} &= y_2(x) \\ \frac{dy_2(x)}{dx} &= -by_1(x) - ay_2(x) + cg(x) \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

このような変形は, 一般的な n 階常微分方程式に対しても可能である。

さて, n 階常微分方程式が1階 n 元連立常微分方程式に変換されているものとして, これに対して4次のルンゲクッタ公式を説明しよう。

連立微分方程式が次式で与えられているものとする。

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) \quad (8.25)$$

式(8.25)において、 $y(x)$ および $f(x, y(x))$ はベクトルであり、次式で定義されたものである。

$$y(x) = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]^T \quad (8.26)$$

$$f(x, y(x)) = [f_1(x, y(x)), f_2(x, y(x)), \dots, f_n(x, y(x))]^T \quad (8.27)$$

添字 T は、転置を表わす。

また、 $dy(x)/dx$ は、式(8.26)の各成分の導関数ベクトルであって、次式を意味する。

$$\frac{dy(x)}{dx} = \left[\frac{dy_1(x)}{dx}, \frac{dy_2(x)}{dx}, \dots, \frac{dy_n(x)}{dx} \right]^T \quad (8.28)$$

プログラム作成の便宜を考慮して、式(8.31)の第 j 成分について考えてみよう。

$$\frac{dy_j(x)}{dx} = f_j\{x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (8.29)$$

式(8.29)に対する 4 次のルンゲクッタ法は次のような処理手順となる。

$$\left. \begin{aligned} k_{1j} &= hf_j(x_i, y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}) \\ k_{2j} &= hf_j(x_i + h/2, y_{1i} + k_{11}/2, y_{2i} + k_{12}/2, \dots, y_{ni} + k_{1n}/2) \\ k_{3j} &= hf_j(x_i + h/2, y_{1i} + k_{21}/2, y_{2i} + k_{22}/2, \dots, y_{ni} + k_{2n}/2) \\ k_{4j} &= hf_j(x_i + h, y_{1i} + k_{31}, y_{2i} + k_{32}, \dots, y_{ni} + k_{3n}) \\ y_{j,i+1} &= y_{j,i} + \frac{1}{6}(k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

8.1.4 定係数線形常微分方程式のルンゲ-クッタ法

n 階の定係数線形常微分方程式は、各導関数の係数が定数で次のような形式の方程式である。

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(x)}{dx} + \dots + a_n y(x) = b_0 \frac{d^m g(x)}{dx^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g(x)}{dx^{m-1}} + \dots + b_m g(x) \quad (8.31)$$

式(8.31)を、たとえば次のような新しい変数

$$z_1(x) = y(x), z_2(x) = dy(x)/dx, \dots, z_n(x) = d^{n-1} y(x)/dx^{n-1} \quad (8.32)$$

を用いると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} dz_1(x)/dx \\ dz_2(x)/dx \\ \vdots \\ dz_n(x)/dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_1(x) \\ \vdots \\ z_1(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times g(x) \quad (8.33a)$$

$$y(x) = [b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{bmatrix} \quad (8.33b)$$

以上のことから、定数係数の線形微分方程式は、一般には式(8.34)の形式に帰着できることが分かる。

$$dz(x)/dx = Az(x) + Bu(x) \quad (8.34a)$$

$$y(x) = Cz(x) \quad (8.34b)$$

ここに、 A, B, C は定数行列とし、 $z(x)$ 、 $u(x)$ 、はそれぞれ n 次元列ベクトル、 r 次元列ベクトルとする。

式(8.34)において、 $u(x)$ は強制項であり、もし $u(x) = 0$ ならば、式(8.34a)は次式のようになる (自由系

とも呼ばれる)。

$$dz(x)/dx = Az(x) \quad (8.35)$$

さて、式(8.34)に対する4次のルンゲ-クッタ法は、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= h\{Az_i + Bu(x_i)\} \\ k_2 &= h\{A(z_i + k_1/2) + Bu(x_i + h/2)\} \\ k_3 &= h\{A(z_i + k_2/2) + Bu(x_i + h/2)\} \\ k_4 &= h\{A(z_i + k_3) + Bu(x_i + h)\} \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y_{i+1} &= Cz_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

8.1.5 推移行列による解法

次に、推移行列に用いた方法を示そう。式(8.34a)の解析解は形式的に次のように書くことができる。

$$z(x_{i+1}) = e^{A(x_{i+1}-x_i)}z(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{A(x_{i+1}-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \quad (8.37)$$

$u(x)$ が区間 $[x_i, x_{i+1}]$ で一定であり、

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= u_i \quad (x_i \leq x < x_{i+1}) \\ x_{i+1} - x_i &= h \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

とすると

$$z(x_{i+1}) = e^{Ah}z(x_i) + \int_0^h e^{A\lambda}Bdu_i \quad (8.39)$$

と表される。

ここで、 $z(x_{i+1}) = z_{i+1}$, $z(x_i) = z_i$, $e^{Ah} = \phi(h)$, $\int_0^h e^{A\lambda}Bd\lambda = \psi(h)$ と置くと式(8.39)は次式のようになる。

$$z_{i+1} = \phi(h)z_i + \psi(h)u_i \quad (8.40)$$

したがって、与えられた A, B に対して $\phi(h), \psi(h)$ を予備計算しておき、式(8.40)を繰り返し適用することによって解を計算することができる。この推移行列 $\phi(h)$ を用いる方法では、式(8.38)が成立することが条件であるが、特に $u(x)$ が計算する全区間で一定のベクトルである場合は、 h は任意にとることができる。

$$\phi(h) = I + Ah + \frac{1}{2!}A^2h^2 + \frac{1}{3!}A^3h^3 + \dots \quad (8.41)$$

$$\psi(h) = \int_0^h \phi(\lambda)d\lambda B = \left(Ih + \frac{1}{2!}Ah^2 + \frac{1}{3!}A^2h^3 + \dots \right) B \quad (8.42)$$

以上、常微分方程式の数値計算法のいくつかについて述べたが、数値解の精度を確保するには、適切な数値解法の選択と計算刻み幅の選び方が重要である。